تعمیروں کا نظریہ اور تجویز

سلسلۂ نصابات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

تعمیروں کا نظریہ اور تجویز

(حصۂ اول)

مُصنّفہ

ایوارٹ ایس۔ اینڈریوز

بی۔ ایس سی (لندن)۔ ایم' آئی' سی' ای۔ ایم' آئی'' اسٹرکٹ' ای' وغیرہ۔

مترجمہ

مولوی ضیاء الدین صاحب انصاری ایم۔ اے (عثمانیہ) بی۔ ایس سی آنرز (مینچسٹر)

اسسٹنٹ انجینیر سر رشتۂ تعمیرات سرکار عالی

سنہ ۱۳۵۷ھ م سنہ ۱۳۴۷ف م سنہ ۱۹۳۸ء

تعمیروں کا نظریہ اور تجویز

حصہ اوّل

باب ۱ تا باب ۱۰

فہرست مضامین

تعمیروں کا نظریہ اور تجویز

حصۂ اول

پہلا باب

صفحہ

دوسرا باب

صفحہ

تیسرا باب

چوتھا باب

پانچواں باب

چھٹا باب

صفحہ

ساتواں باب

متحرک بوجھوں کے لیے خماؤ کے معیار اور جزی قوتیں ۲۳۰

آٹھواں باب

شہتیروں کے انصراف ۲۵۷

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

تعمیروں کا نظریہ اور تجویز

نوٹ - جن حصوں پر چلیپے کا نشان لگایا گیا ہے پہلی بار مطالعہ کرتے وقت ان کو چھوڑ دیا جائے۔

پہلا باب

فساد، زور اور لچک

فساد کی تعریف یہ کی جا سکتی ہے کہ یہ کسی جسم کی شکل یا صورت کی تبدیلی ہے جو بیرونی قوتوں کے عمل سے پیدا ہو۔

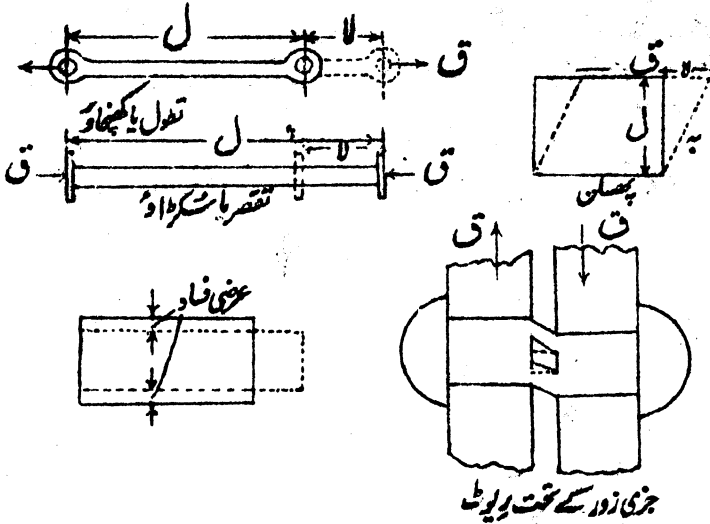
زور کی تعریف یہ ہو گی کہ یہ کسی جسم کے ذرّات کے درمیان وہ قوت ہے جو فساد کی وجہ سے پیدا ہو۔

لچکدار جسم وہ ہے جس میں ایک خاص فساد سے ایک معین زور پیدا ہو اور زور اور فساد اِس بیرونی قوت کی مدت پر منحصر نہ ہوں جس سے یہ زور اور فساد پیدا ہوئے اور قوت کے ہٹ جانے پر زور اور فساد غائب ہو جائیں۔ جس جسم میں قوت کے ہٹ جانے پر فساد غائب نہ ہو جائے اُس کے متعلق کہا جاتا ہے کہ اس میں ایک مستقل فساد پیدا ہو گیا ہے اور اس طرح کے جسم کو پیکر پذیر کہا جاتا ہے۔

اگر کوئی لچکدار جسم تعادل میں ہو تو ضرور ہے کہ اس کے کسی دیے ہوئے حصے پر عمل کرنے والے زور اس حصے پر عمل کرانے والی تمام بیرونی قوتوں کی تعدیل کریں۔ بیرونی قوتیں لگانے سے جسم میں فساد شروع ہوتا ہے اور یہ فساد بڑھتا جاتا ہے یہاں تک کہ اس سے پیدا ہونے والے زوروں کی مقدار اتنی ہو جائے کہ بیرونی قوتوں کی تعدیل کر سکیں۔

تعمیر کے اغراض کے لیے کسی شے کے بکار آمد ہونے کے لیے ضروری ہے کہ اس پر جو زور ڈالے جائینگے اُن کی حدود کے اندر وہ لچک دار رہے۔ اکثر ٹھوس اشیا ایک حد تک لچکدار ہوتی ہیں اور فساد ایک خاص حد سے بڑھ جائے تو پیکر پذیر ہو جاتی ہیں۔

ہوک کا قانون ــــ جو ہوک نے ۱۶۷۶ء میں معلوم کیا۔ یہ اس امر کو بیان کرتا ہے کہ لچکدار جسم میں فساد زور کے متناسب ہوتا ہے۔ اس طرح اگر ایک سلاخ کے طول میں ایک خاص کھنچاؤ پیدا کرنے کے لیے ایک خاص وزن درکار ہو تو اس سے دوگنا کھنچاؤ پیدا کرنے کے لیے اس قانون کے بموجب اس سے دوگنا وزن درکار ہوگا۔ ایک شہتیر میں ایک خاص انصراف پیدا کرنے کے لیے ایک خاص وزن درکار ہو تو اس سے دوگنا انصراف پیدا کرنے کے لیے اس سے دوگنا وزن درکار ہوگا۔

فساد اور زور کی قسمیں۔ فسادوں کی تین قسمیں کی جا سکتی ہیں۔ (۱) تطول یا کھنچاؤ (۲) تقصر یا سکڑاؤ (۳) پھسلن۔ ان فسادوں کے متناظر زور یہ ہونگے (۱) تنشی زور (۲) فشاری زور (۳) جزی زور۔

شکل ۱۔ فساد کی قسمیں

اگر کوئی جسم ان میں سے صرف ایک کے زیرِ عمل ہو تو کہا جاتا ہے کہ سادہ فساد کی حالت میں ہے۔ اور اگر ایک سے زیادہ کے زیرِ عمل ہو تو کہا جاتا ہے کہ مخلوط فساد کی حالت میں ہے۔

سادہ فسادوں کی مثالیں یہ ہیں:۔ بندھن سلاخ۔ ستون جس پر بوجھ مرکزی ہو۔ ریوٹ۔ مخلوط فساد کی حالت کے جسم کی بہترین مثال شہتیر ہے جس میں فسادوں کی تمام قسمیں پائی جاتی ہیں جیسا کہ آگے چل کر دکھایا جائیگا۔

زور کی حدت۔ ایک زیرِ فساد جسم کی تراش میں نقطہ لا پر ایک چھوٹے رقبہ ب کا تصور کرو۔ اگر اس چھوٹے رقبے پر عمل کرنے والی تمام سالماتی قوتوں کا حاصل ح ہو تو ح/ب نقطہ لا پر زور کی حدت کہلائیگا۔ جو اجسام پیچیدہ فساد کے تحت ہوں اُن میں زور کی حدت، تراش کے مختلف نقاط پر،

مختلف ہوگی۔ اور جو سادہ فساد کے تحت ہوں اُن میں تراش کے ہر نقطے پر زور وہی ہوگا اور اس طرح اگر پوری تراش کا رقبہ ب ہو اور پوری تراش پر عمل کرنے والی مجموعی قوت ق ہو تو زور کی حدت $\frac{ق}{ب}$ ہوگی۔ آیندہ "زور" سے ہماری مراد "زور کی حدت" ہوگی الا اس کے کہ اس کے خلاف صراحت کی گئی ہو۔

اکائی کا فساد ۔ اکائی کے فساد سے مراد شے کے اکائی طول کا فساد ہے۔ تطول اور تقصر کی صورت میں مجموعی فساد جسم کے اصلی طول کے متناسب ہوتا ہے۔ مثلاً ایک ہی بوجھ کے تحت ۲ فٹ لمبی سلاخ ۱ فٹ لمبی سلاخ سے دوگنا کھنچیگی۔ شکل ۱ میں اگر تناؤ اور فشار کی سلاخوں کا طول فساد سے پہلے ل ہو اور تطول یا تقصر لا ہو تو اکائی کا فساد $\frac{لا}{ل}$ ہے۔

پھسل فساد کی صورت میں جسم کا طول نہیں بدلتا بلکہ زاویہ بدلتا ہے اور زاویے کی یہ تبدیلی عہ، اکائی کے فساد کا ناپ ہے۔ اگر یہ زاویہ چھوٹا ہو، جیسا کہ اشیائے تعمیر میں ہمیشہ ہوگا، تو یہ تقریباً $\frac{لا}{ل}$ کے مساوی ہوگا جہاں لا اور ل وہ مقداریں ہیں جو شکل میں دکھائی گئی ہیں۔

پوائی سن[۱] کی نسبت ۔ عرضی فساد ۔ جب کسی جسم کو کھینچا یا بھینچا جاتا ہے تو ساتھ ہی ایک عرضی فساد، واقع ہوتا ہے جو جسم کے حجم کی تبدیلی کو روکنے کا تقاضا رکھتا ہے۔ عرضی فساد کی مقدار طولی فساد سے ایک خاص نسبت رکھتی ہے۔

$$\text{یہ نسبت} = \frac{\text{عرضی فساد}}{\text{طولی فساد}} = \text{عا}$$

جو اکثر مادوں کے لیے $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{4}$ کے درمیان ہوتا ہے اور "پوائی سن کی نسبت" کہلاتا ہے۔

[۱] Poisson

لچک کے ماہرین کی ایک جماعت کا خیال ہے کہ اس نسبت عا کی قیمت ۱/۴ ہونی چاہیے، لیکن تجربات سے اس کی پوری تصدیق نہیں ہوتی اگرچہ کہ بعض اشیا کے لیے یہ بہت قریب قریب صحیح ہے۔ اس نسبت کو بالراست ناپنا مشکل ہے۔ اس کی قیمت معلوم کرنے کا بہترین طریقہ یہی ہے کہ جز اور تناؤ کے لچک کے مقیاسوں سے بالواسطہ حاصل کریں جس کا طریقہ آگے چل کر سمجھایا جائیگا۔

زور اور فساد کے نقشے ۔ اگر کسی شے کا تناؤ یا فشار میں

امتحان کیا جائے اور ہر زور پر فساد کو ناپا جائے اور ایک نقشہ میں ان فسادوں کو زوروں کے بالمقابل ترسیم کیا جائے تو جو نقشہ حاصل ہوگا اُس کو "زور اور فساد کا نقشہ" کہا جاتا ہے۔ اگر شے مذکور ہوک کے قانون کی پابندی کرتی ہو تو یہ نقشہ ایک خطِ مستقیم ہوگا۔ اکثر دھاتوں کے لیئے زور اور فساد کا نقشہ، خطِ مستقیم ایک خاص نقطے تک ہوگا جس کو "لچک کی حد" کہتے ہیں جس کے بعد فساد، زور کی بہ نسبت زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔ یہاں تک کہ ایک نقطہ آتا ہے جس کو نقطۂ مغلوبیت کہتے ہیں جب کہ فساد میں یکایک بڑا اضافہ واقع ہوتا ہے۔ نقطۂ مغلوبیت کے بعد دھات ایک پیکر پذیر حالت میں ہوتی ہے اور فساد تیزی سے بڑھتے رہتے ہیں یہاں تک کہ شکستگی واقع ہوتی ہے۔

شکل ۱۲ میں ایسے نرم فولاد کے جو کہ تعمیروں کے کاموں کے لیے موزوں ہے ایک تنشی نمونے کے زور اور فساد کا نقشہ دکھایا گیا ہے۔ نقشے کا حصہ اب ایک خطِ مستقیم ہے اور اُس عرصے کو تعبیر کرتا ہے جس میں شے ہوک کے قانون کی پابندی کرتی ہے۔ نقطہ ج نقطہ مغلوبیت ہے۔ اس پر فساد اس حد تک بڑھتا ہے کہ نقشے کے پہلے حصے کو دوبارہ ایک بہت چھوٹے پیمانے پر کھینچا گیا۔

یہ حصہ ا ب ج سے دکھایا گیا ہے۔ اس کے بعد فساد نقشے میں دکھائے ہوئے طریقہ پر بڑھتا رہتا ہے یہاں تک کہ نقطہ د آتا ہے۔ ج اور د کے درمیان منحنی تقریباً ایک مکافی ہے۔ نقطہ د پر زور کی اعظم قیمت ہوتی ہے۔ اس کے بعد نمونہ ایک خاص مقام پر پتلا پڑ جاتا ہے اور کھنچ جاتا ہے اور اگر زور قائم رہے تو آخرکار ٹوٹ جاتا ہے۔ حصہ د ع جو نقطہ دار دکھایا گیا ہے فساد کے اُس بڑھنے کو تعبیر کرتا ہے جس کے دَوران میں زور بظاہر گھٹتا ہے۔ یہ گھٹاؤ صرف ظاہری ہے کیونکہ اس عرصے میں نمونے کا رقبہ چھوٹا ہو جاتا ہے۔ اس طرح بوجھ کو گھٹا کر زور کو پھر بھی وہی رکھا جا سکتا ہے۔ عملاً بوجھ کو اس طرح گھٹانا بہت مشکل ہے کہ رقبے کے گھٹاؤ کا ساتھ دے سکے۔ اس وجہ سے نقشے کا یہ اخیر حصہ بہت ہی شاذ صحیح ہوتا ہے اور نیز عملی نقطۂ نظر سے اس کی کوئی اہمیت بھی نہیں۔

نقطۂ شکستگی پر نمونے کا کھنچ جانا شکل میں دکھایا گیا ہے۔ امتحان سے پہلے دستور ہے کہ نمونے کے طول میں مساوی فاصلوں سے مرکز سنبہ کے نشان لگائے جائیں۔ شکستگی کے بعد ان نشانات کے باہمی فاصلوں سے معلوم ہوتا ہے کہ طول میں مختلف نقاط پر تطول کی تقسیم کیا ہوتی ہے۔ شکل میں اس طرح کے چار نقاط ا، ب، ج، د دکھائے گئے ہیں۔ سب میں زیادہ تطول نقطۂ شکستگی پر واقع ہوتا ہے۔ اس طرح ایک چھوٹے طول کے نمونے میں فی صدی مجموعی تطول بڑے طول کے نمونوں سے زیادہ ہوگا۔ تطول پر نمونے کے طول کے اثر کے متعلق مکمل معلومات کے لیے قارئین پروفیسر اُنون[1] کے مضمون کا مطالعہ کریں (روئداد انسٹی ٹیوٹ آف سول انجینیرز جلد ۱۵۵)۔

تعمیروں کے کاموں کے لیے عموماً یہ تخصیص کی جاتی ہے کہ فولاد کی انتہائی یا اعظم تنشی مضبوطی ۲۸ تا ۳۲ ٹن فی مربع انچ ہو اور اس کے ۸ انچ کے طول میں ۲۰ فی صدی کا تطول ہو۔ ایک معین تطول کی تخصیص کی غایت

[1] Professor Unwin

شکل ۲ - زور و فساد کے نقشے

یہ ہے کہ فولاد میں تمدد کافی ہو۔ متمدد فولاد بالعموم پھوٹک نہیں ہوتا اگرچہ چند استثنائی صورتوں میں دیکھنے میں آیا ہے کہ ایک فولاد تمدد کے معمولی امتحانات میں پورا اُترا اور پھر بھی اس کی شکستگی بالکل پھوٹک شئے کی طرح ہوئی۔ اسی وجہ سے حال میں بعض ماہرین نے ضرب کا امتحان استعمال کیا ہے اور معلوم ہوتا ہے کہ اس طریقے سے عمدہ نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

نرم فولاد کے لیے فشار اور جز کے زور اور فساد کے نقشے تناؤ کے نقشے سے بہت مشابہ ہوتے ہیں۔ فشار میں پورے نقشے کا حاصل کرنا مشکل ہے کیونکہ ناکارگی جھکاؤ کی وجہ سے واقع ہوتی ہے سوائے اُن صورتوں کے جن میں طول بہت چھوٹا ہو اور طول چھوٹا ہو تو فسادوں کا ناپنا مشکل ہوتا ہے۔ اور جز میں امتحان مروڑ کے ذریعے کیا جاتا ہے کیونکہ دوسرے طریقے سے خماؤ کے اثرات سے بچنا تقریباً ناممکن ہے۔ مروڑ میں جزی زور یکساں نہیں ہوتا جس کی وجہ سے گول سلاخ میں سطح کے قریب کا مادّہ نقطۂ مغلوبیت کو مرکز پر کے مادے سے پہلے پہنچتا ہے اور اس کی وجہ سے ظاہری نقطۂ مغلوبیت اصلی سے زیادہ حاصل ہوتا ہے۔ آگے چل کر معلوم ہوگا کہ شہتیر کے ذریعے تناؤ یا فشار کا امتحان کیا جائے تو اس میں بھی یہی ہوتا ہے۔

لچک کی حد کی اہمیت کو انجینیری تعمیروں کے مجوزوں نے بڑی حد تک نظرانداز کیا ہے لیکن چونکہ جس نظریے پر شہتیروں کی مضبوطی کے اکثر ضابطوں کی بنا ہے اس میں یہ فرض کیا گیا ہے کہ زور فساد کے متناسب ہے اس لیے یہ یاد رہے کہ ہمارے حسابات اسی وقت تک صحیح ہونگے جب تک کہ ھوک کا قانون صحیح ہو۔ اس سے ظاہر ہے کہ مادے کی لچک کی حد ایک بڑی اہم مقدار ہے۔ ہم اس مسئلے سے عملی زوروں کی بحث میں مزید بحث کرینگے۔ (باب۲)۔

لچک کی حد اور نقطۂ مغلوبیت کے درمیان خلط ملط

خلط ملط۔ تجارتی آزمائشوں میں یہ بات بہت عام ہے کہ فسادوں کی پیمائش کے لیے کوئی صحت والے ذرائع استعمال نہیں کیے جاتے (فسادوں کی پیمائش کے آلات امتداد پیما کہلاتے ہیں۔ ان آلات کا اور آزمائش کی مشینوں کا بیان اس کتاب کی وسعت سے باہر[1] ہے) مشین کے گز پر بوجھ کو باہر کی طرف حرکت دی جاتی ہے یہاں تک کہ گز یکایک اپنی روکوں پر گر پڑتا ہے۔ گز کا یہ گر پڑنا اس وقت واقع ہوتا ہے جب کہ نقطۂ مغلوبیت واقع ہو لیکن بہت لوگ اس کو لچک کی حد کہتے ہیں۔ شکل ۲ء سے نقشے سے معلوم ہوگا کہ تنشی آزمائش میں اس سے کوئی بڑی غلطی واقع نہیں ہوتی لیکن آڑے خماؤ میں یہ فرق زیادہ واضح ہوتا ہے اور اس سے خلط ملط واقع ہوتا ہے۔ ہم اس نکتے سے شہتیروں کے سلسلے میں باب ۶ صفحہ ۲۲۷ پر مزید بحث کرینگے۔

ڈھلے لوہے کے لیے زور اور فساد کے نقشے۔

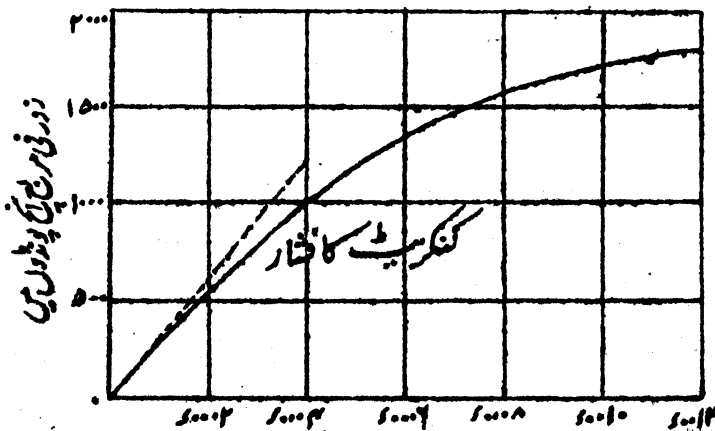
ڈھلا لوہا بطور ایک مسالا تعمیر کے باستثنا فشاری ارکان یا داب روکوں کے تقریباً متروک ہوگیا ہے۔ ڈھلے لوہے کی مضبوطی بڑی حد تک اس کی مختلف ترکیبوں پر منحصر ہے۔ اس کی تنشی مضبوطی فشاری مضبوطی سے خاصی کم ہوتی ہے۔ شکل ۸ء۲ میں تناؤ اور فشار دونوں کے "زور اور فساد کے نقشے" دکھائے گئے ہیں۔ ان کو دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ تناؤ میں فساد در اصل زور کے کبھی بھی متناسب نہیں ہوتا لیکن فشار میں زور اور فساد تقریباً ۸ ٹن فی مربع انچ کے زور تک تقریباً متناسب ہوتے ہیں۔ شکل میں فشار کا منحنی مکمل نہیں کیا گیا کیونکہ جھکاؤ واقع

---

[1] مزید معلومات کے لیے قارئین مصنف کی کتاب "مضبوطی اشیا" دیکھ سکتے ہیں۔

ہو جاتا ہے۔ ڈھلے لوہے میں زور اور فساد کے متناسب نہ ہونے کی وجہ ہی ہے کہ ڈھلے لوہے کے شہتیروں کی حقیقی اور محسوبہ مضبوطیوں میں اتنا بڑا اختلاف ہوتا ہے۔

دیگر اشیا۔ چوبینہ۔ چوبینے کی صحیح آزمائش میں بہت سی دقتیں ہیں جن کی وجہ رطوبت اور مادے کا متجانس پن ہے۔ اتنا کہا جا سکتا ہے کہ زور اور فساد کا نقشہ ایک حصے تک تقریباً مستقیم رہتا ہے لیکن پھر اس طرح منحنی ہو جاتا ہے جس طرح ڈھلے لوہے کا فشاری منحنی ہوتا ہے۔

سیمنٹ اور کنکریٹ۔ سیمنٹ اور کنکریٹ کے فشار کے زور اور فساد کے نقشے کا کوئی حصہ ٹھیک ٹھیک مستقیم نہیں ہوتا۔ اس طرح اس کی کوئی لچک کی حد نہیں۔ اور نقشے کا منحنی ترکیب پر اور جمنے کے بعد کی مدت پر منحصر ہوتا ہے۔

شکل ۱۲۔ کنکریٹ کے فشار کے زور اور فساد کے نقشے

شکل ۳-۲ میں جو منحنی دکھایا گیا ہے وہ تقریباً بالکل ایک مکافی ہے۔ یہ منحنی ایک ۱ : ۲/۱ ۳ : ۶ کنکریٹ کا ہے جو ۹۰ دن کا تھا جس کا امتحان مسٹر اسلوکم (الی نوآئے یونیورسٹی) نے کیا۔ بعض ماہرین فرض کر لیتے ہیں کہ منحنی ایک مکافی ہے لیکن عملاً یہ بہت کم ہوتا ہے کہ منحنی مکافی ہونے کے اتنا قریب ہو۔ البتہ زور اور فساد کا نقشہ تقریباً ہمیشہ ایک مشابہ شکل و صورت کا ہوتا ہے جس میں فساد زور کی بہ نسبت زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔ یہ یاد رکھنا بے حد اہم ہے کہ سیمنٹ اور کنکریٹ میں زور اور فساد کا ربط اجزا کے وصف اور تناسب کے بدلنے سے بڑی حد تک بدل جاتا ہے اور اس کو تقریباً مستقل نہیں سمجھا جا سکتا جس طرح کہ فولاد کی صورت میں سمجھا جاتا ہے۔ تناؤ میں اس سے کسی قدر مشابہ منحنی حاصل ہوتا ہے لیکن چونکہ سیمنٹ اور کنکریٹ تناؤ میں تقریباً کبھی استعمال نہیں ہوتے اس لیے اس کی تنشی مضبوطی کی کچھ زیادہ تحقیق نہیں کی گئی۔ نیز یہ بہت متغیر بھی ہے۔

اینٹ۔ پتھر۔ وغیرہ — اینٹ اور پتھر کے زور اور فساد کے نقشے منحنی ہوتے ہیں لیکن اتنے نہیں جتنے کنکریٹ کے۔ ان میں کوئی معین لچک کی حد نہیں اور منحنی بڑی حد تک اس پر منحصر ہے کہ کیا یہ اشیا گچ میں بٹھائی گئی ہیں کیونکہ اس صورت میں منحنی گچ کے خواص سے متاثر ہوگا۔ اس مضمون پر مزید معلومات کے لیے قارئین جانسن کی "اشیائے تعمیر" اور پاپل ویل و کیرنگٹن کی "انجینیری اشیا کے خواص" کا مطالعہ کر سکتے ہیں۔

لچک کے مستقل یا مقیاس ۔ اگر کوئی شئے فی الحقیقت لچکدار ہو یعنی اگر فساد زور کے متناسب ہو تو یہ لازم آتا ہے کہ زور

۱ Mr. R. H. Slocum ۲ Illinois ۳ Popplewell ۴ Carrington

اکائی کے فساد کا ہمیشہ ایک خاص ضعف ہو یعنی نسبت $\frac{\text{زور کی حدت}}{\text{اکائی کا فساد}}$ مستقل ہو۔ اس زور اور فساد کی نسبت کو مقیاس کہا جاتا ہے۔ تناؤ اور فشار کے مقیاس کو عام طور پر ینگ کا مقیاس کہلاتا ہے۔ اور اس کے لیے حرف ے اختیار کیا جاتا ہے۔ جز کے مقیاس کو جزی مقیاس یا استواری کا مقیاس (س) کہا جاتا ہے۔ ایک اور مقیاس حجمی مقیاس (ح) ہے جو دباؤ یا تناؤ کی حدت کی اور اُس اکائی کی تبدیلی کی نسبت کو تعبیر کرتا ہے۔ جو زیرِ بحث شے کے ایک ایسے مکعب کے حجم میں پیدا ہو جس کے تمام چہروں پر دباؤ یا تناؤ کی یہ حدت عمل کرے۔

تعمیروں کی تجویز میں ہم کو سب میں زیادہ ینگ کے مقیاس سے سابقہ رہیگا۔ فرض کرو کہ ایک تنشی رکن (جس کو بندھن کہا جاتا ہے) یا ایک فشاری رکن (یعنی د اب ر دک) پر جس کا طول ل اور تراشی رقبہ ب ہے ایک کھنیچ یا ڈھکیل د عمل کرتا ہے اور یہ کہ تطول یا تقصر لا ہے (شکل ۱) ۔ تب زور کی حدت $\frac{\text{د}}{\text{ب}}$ ہوگی اور اکائی کا فساد $\frac{\text{لا}}{\text{ل}}$ ہوگا۔

$$\therefore \text{ینگ کا مقیاس} = \text{ے} = \frac{\text{د}}{\text{ب}} \div \frac{\text{لا}}{\text{ل}} = \frac{\text{د ل}}{\text{ب لا}}$$

عددی مثال۔ ایک نرم فولاد کی بندھن سلاخ پر جس کا طول ۱۲ انچ اور قطر ۱ $\frac{1}{2}$ انچ ہے ۱۸ ٹن کی ایک کھینچ عمل کرتی ہے۔ اگر تطول ۰،۰۹۴ انچ ہو تو ینگ کا مقیاس معلوم کرو۔

۱ $\frac{1}{2}$ انچ قطر کی تراشش کا رقبہ = ۱،۷۶۷ مربع انچ

$\therefore$ زور فی مربع انچ = $\frac{۱۸}{۱،۷۶۷}$ = ۱۰،۱۹ ٹن فی مربع انچ

اکائی کا فساد = $\frac{۰،۰۹۴}{۱۲}$ = ۰،۰۰۷۸۳

∴ ینگ کا مقیاس = $\frac{۱۰٫۱۹}{۰٫۰۰۰۷۸۳}$ = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ

ینگ کے مقیاس کی قیمت زور اور فساد کے نقشے سے معلوم ہو سکتی ہے۔ مثلاً نرم فولاد کے نقشے (شکل ۲) سے

ے = ز/لا

ربط ے = زور/فساد میں اگر فساد = ۱ یعنی اگر سلاخ کو اصلی طول کے دو گنے تک کھینچا جائے تو ے = زور اور اسی بنا پر بعض مصنفین نے ینگ کے مقیاس کی یہ تعریف کی ہے کہ ینگ کا مقیاس وہ زور ہے جو کسی سلاخ کے طول کو دُگنا کر دینے کے لیے درکار ہو۔ بعض طلبہ اس تعریف کو پہلے کی تعریف سے زیادہ واضح پاتے ہیں۔ لیکن یہ یاد رہے کہ اشیائے تعمیر میں سے کوئی شے ٹوٹے بغیر دُگنے طول تک نہیں کھینچی جاسکتی۔

کنکریٹ اور مماثل اشیاء کے لیے ینگ کا مقیاس۔

اگر ینگ کا مقیاس ایک مستقل مقدار ہو تو اس کو صرف لچک کی حد کے اندر تک معلوم کر سکتے ہیں اور صحیح دیکھا جائے تو کنکریٹ جیسی اشیاء کے لیے کوئی مقیاس ہی نہیں کیونکہ ان میں فساد، زور کے متناسب نہیں۔ ہم آگے چل کر باب ۱۵ میں دیکھینگے کہ ینگ کے مقیاس کی قیمت محکم کنکریٹ کی تجویز میں ایک بہت اہم مقدار ہے۔ شکل ۲ سے ظاہر ہے کہ چونکہ کنکریٹ میں فساد، زور کی بہ نسبت زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے اس لیے زور/فساد کی قیمت پست زور پر بڑے زور کے مقابلے میں زیادہ ہوگی اس لیے قبل اس کے کہ اس کی قیمت ہمارے کچھ کام آسکے وہ زور معلوم ہونا چاہیے جس پر اس کو محسوب کیا گیا ہے۔ ان اصولوں پر جن پر نظریۂ تعمیر کی بنیاد ہے جتنا زور دیا جائے کم ہے اور کنکریٹ میں فشاری مضبوطی اور ینگ کے مقیاس کے اعداد بے کار ہیں جب تک کنکریٹ کی ترکیب نہ معلوم ہو اور وہ زور نہ معلوم ہو جس پر مقیاس محسوب کیا گیا ہے۔

لچک کے مستقلوں کے درمیان ربط ـــــ لچکدار اشیا میں

لچک کے مستقلوں ے، س، ح اور پوائی سن (Poisson) کی نسبت عا میں چند خاص ربط ہونگے۔ اِن کو اس طرح معلوم کیا جا سکتا ہے:۔

پہلے ے اور ح کے درمیان ربط معلوم کرنے کے لیے ایک مکعب پر غور کرو جس کا ہر ضلع اکائی ہے اور جس پر ایک کھینچ ز عمل کرتی ہے شکل ۲ (و)۔ فرض کرو کہ محور کی سمت میں تطول و ہے اور عرضی تقصر ب ہے۔

تب

مکعب کا ابتدائی حجم = ۱

فساد کے بعد حجم = (۱ + و) (۱ - ب)^{۲}

= ۱ - ۲ب + ب^{۲} + و - ۲وب + وب^{۲}

= ۱ + و - ۲ب (تقریباً)

کیونکہ فسادوں کے بہت چھوٹے ہونے کی وجہ سے اُن کے حاصلِ ضرب نظر انداز کیے جا سکتے ہیں۔

∴ حجم کا اضافہ = (۱ + و - ۲ب) - ۱

= و - ۲ب

اب مکعب کے ہر پہلو پر زور لگاؤ تو تین زور ہونگے جن میں سے ہر ایک سے حجم کا اضافہ (و - ۲ب) عمل میں آئیگا۔

∴ حجم کا مجموعی اضافہ تقریباً = ۳ (و - ۲ب)

= ۳و (۱ - $\frac{۲ب}{و}$)

لیکن $\frac{ب}{و}$ = $\frac{\text{عرضی فساد}}{\text{طولی فساد}}$ = عا

∴ حجم کا اضافہ = ۳و (۱ - ۲عا)

اور چونکہ اصلی حجم = ۱

∴ $\frac{\text{حجم کا اضافہ}}{\text{اصلی حجم}}$ = حجمی اکائی کا فساد = ۳و (۱ - ۲عا)

لیکن $\text{ح} = \dfrac{\text{کھینچ کی حدت}}{\text{اکائی کا فساد}} = \dfrac{\text{ز}}{\text{۳ ر(۱ - ۲ عا)}}$

اور $\dfrac{\text{ز}}{\text{ر}} = \dfrac{\text{تنشی زور کی حدت}}{\text{اکائی کا تنشی فساد}} = \text{ینگ کا مقیاس} = \text{ے}$

ش $\text{ح} = \dfrac{\text{ے}}{\text{۳(۱ - ۲ عا)}}$ ..... (۱)

ے اور س کا ربط اِس طرح معلوم کیا جائیگا۔

فرض کرو کہ حدت ز کی دو جزی قوتیں ایک اکائی مکعب ا ب ج د کے چہروں پر عمل کرتی ہیں، شکل عہ (ب)۔ اب حصہ ا د ج شکل عہ (ج) کے تعادل پر غور کرو۔ قوتوں ز کے توازن کے لیے وتر اج پر ایک کھینچنے والی قوت زَ ہونی چاہیے اور زَ کی قیمت $\sqrt{۲}$ ز ہونی چاہیے لیکن جس رقبے پر یہ عمل کرتی ہے وہ $\sqrt{۲}$ ہے کیونکہ مکعب کا ضلع اکائی ہے۔ اِس طرح تنشی زور $\dfrac{\sqrt{۲}\ \text{ز}}{\sqrt{۲}}$ = ز ہوگا۔ اسی طرح حصہ ب ج د شکل عہ (د) پر غور کرنے سے حاصل ہوگا کہ وتر ب د پر ایک فشاری قوت $\dfrac{\sqrt{۲}\ \text{ز}}{\sqrt{۲}}$ = ز ہونی چاہیے۔ اِس طرح دیکھو دو علی القوائم مستویوں پر عمل کرنے والے جزی زور معادل ہیں ایک تنشی زور اور ایک فشاری زور کے جو ایک دوسرے کے علی القوائم اور جزی زوروں سے ۴۵° پر عمل کریں اور جن کی حدات جزی زور کی حدات کے مساوی ہو۔

مکعب کی شکل بگڑ کر ا ب ا ج ا د ا شکل عہ (ع) ہو جائیگی۔

اکائی کا جزی فساد بگاڑ کے زاویے ۲ فہ سے ناپا جاتا ہے۔ چونکہ فساد بہت چھوٹے ہونگے اِس لیے یہ تقریباً $= \dfrac{\text{۲ ب ب}_۱}{\frac{۱}{۲}\ \text{ب ج}} = \dfrac{\text{۲ ب ب}_۱}{\frac{۱}{۲}}$

(کیونکہ ب ج = ۱) = ۴ ب ب۱

فرض کرو کہ وتر ب د کے متوازی تناؤ سے اکائی کا فساد = ل۔ تب اس وتر کی سمت میں اج کے متوازی فشار کے عرضی فساد کی وجہ سے بھی ایک فساد ہوگا اور یہ عا × ل ہوگا۔ اس لیے وتر کی سمت میں مجموعی اکائی کا فساد = ل (۱ + عا)، لیکن ب ب۱ = وتر کی سمت میں اکائی کا فساد × ½ ب د
کیونکہ ب ب۱ = د د۱

$$\therefore\ \text{ب ب}_1 = \text{ل}\,(1 + \text{عا}) \times \tfrac{1}{2}\,\text{ب د} = \frac{\sqrt{2}\,\text{ا ل}}{2}(1 + \text{عا})$$

چونکہ فساد دراصل بہت چھوٹے ہیں اس لیے ب ب۲ ب۱ بہت تقریباً ایک قائم الزاویہ مثلث ہے۔

$$\therefore\ \text{ب ب}_1 = \sqrt{2}\ \text{ب ب}_2$$

$$\text{یا}\quad \text{ب ب}_2 = \frac{\text{ب ب}_1}{\sqrt{2}} = \frac{\text{ل}(1 + \text{عا})}{2}$$

$$\text{لیکن}\quad \frac{\text{تنشی زور کی حدت}}{\text{تنشی اکائی کا فساد}} = \frac{\text{ز}}{\text{ل}} = \text{ے}$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{جزی زور کی حدت}}{\text{اکائی کا جزی فساد}} = \frac{\text{ز}}{4\,\text{ب ب}_2} = \text{س}$$

چونکہ ہم ثابت کر چکے ہیں کہ وتر کی سمت میں تنشی زور کی حدت جزی زور کے مساوی ہے

$$\text{اس لیے}\quad \text{ز} = \text{ل ے} = \text{س} \times 4\,\text{ب ب}_2$$

$$\therefore\ \frac{\text{ے}}{\text{س}} = \frac{4\,\text{ب ب}_2}{\text{ل}} = \frac{4\,\text{ل}(1 + \text{عا})}{2\,\text{ل}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{ے}}{\text{س}} = 2(1 + \text{عا}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اور (۱) میں دکھایا جا چکا ہے کہ

شکل ۴

$$\frac{\text{ے}}{\text{ح}} = \text{۳}\,(\text{۱} - \text{۲}\,\text{عا}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{۳})$$

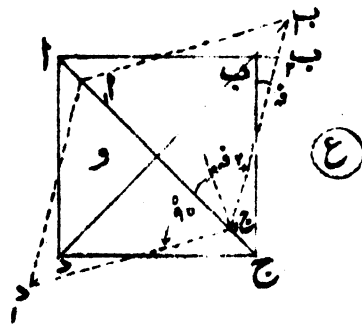
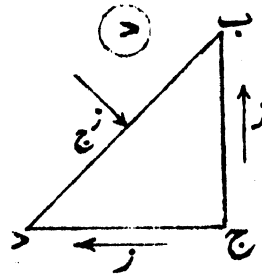
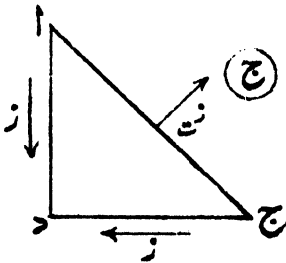
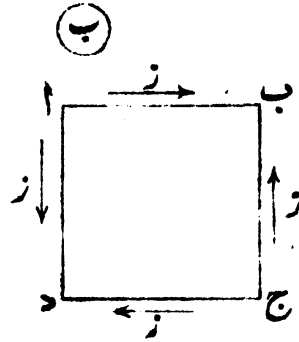
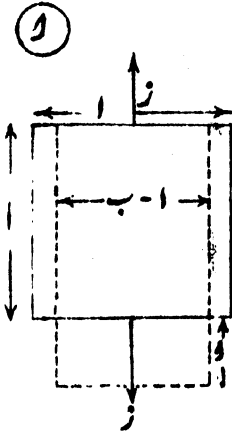
$\therefore$ (۲) سے $\text{عا} = \frac{\text{ے}}{\text{۲}\,\text{س}} - \text{۱}$

اور (۳) سے $\text{عا} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} - \frac{\text{ے}}{\text{۶}\,\text{ح}}$

$$\therefore \quad \frac{\text{ے}}{\text{۲}}\left(\frac{\text{۱}}{\text{س}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}\,\text{ح}}\right) = \frac{\text{۳}}{\text{۲}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{۱}}{\text{س}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}\,\text{ح}} = \frac{\text{۳}}{\text{ے}}$$

یا

$$\frac{\text{۹}}{\text{ے}} = \frac{\text{۳}}{\text{س}} + \frac{\text{۱}}{\text{ح}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{۴})$$

یہ مستقلوں کے باہمی ربط کی سادہ ترین شکل ہے۔

اگر $\text{عا} = \frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ جیسا کہ بعض ماہرین کا بیان ہے تو $\frac{\text{ے}}{\text{س}} = \text{۲٫۵}$ اور اسی کو صحیح مانا جائے اگر کسی شے کے لیے س کی قیمت معلوم نہیں۔

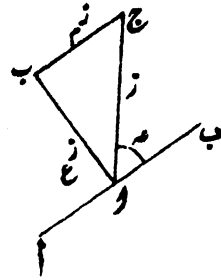
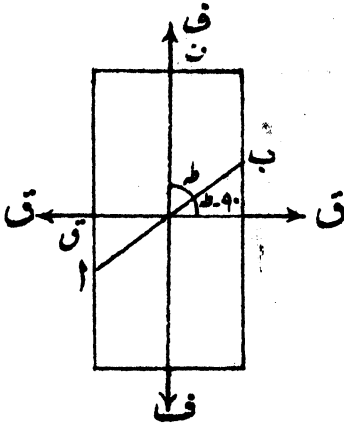
مخلوط زور ـــــ صلابی زور ـ یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ جب کوئی جسم زور کے کسی پیچیدہ نظام کے تحت ہو تو یہ زور اُن زوروں کے مساوی ہونگے جو تین باہم علی القوائم مستویوں پر عمل کرنے والے سادہ تنشی یا فشاری زوروں سے پیدا ہوں۔ یہ سادہ زور صلابی زور کہلاتے ہیں۔

مثلاً ایک کندے پر غور کرو جس پر دو علی القوائم سمتوں میں دو کھینچیں ف اور ق عمل کرتی ہیں (شکل ۵) اور فرض کرو کہ اِن سمتوں میں کھینچ تراشی رقبہ کے فی مربع انچ علی الترتیب ف اور ق ہے۔

ایک مستوی ا ب پر کے زوروں پر غور کرو جو قوت ف کی سمت سے زاویہ ط بنائے۔

زور ف کو ا ب کے علی القوائم اور اس کی سمت میں یعنی ا ب کی عمادی اور مماسی سمتوں میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

اب ف کے علی القوائم ۱ مربع انچ رقبے پر غور کرو۔ اس کے متناظر

اب پر رقبہ $\frac{1}{\text{جب ط}}$ ہوگا۔

شکل ۵۔ صدر زور

ف کا جزوِ تحلیلی اب کے علی القوائم ف جب ط اور اب کی سمت میں ف جم ط ہوگا۔ لیکن زور = قوت کا جزوِ تحلیلی ÷ رقبہ

∴ زور ف کا جزوِ تحلیلی اب پر عمادی سمت میں

$$= \text{ف جب ط} \div \frac{1}{\text{جب ط}}$$

$$= \text{ف جب}^2 \text{ط}$$

اور زور ف کا جزوِ تحلیلی اب پر مماسی سمت میں

$$= \text{ف جم ط} \div \frac{1}{\text{جب ط}}$$

$$= \text{ف جب ط جم ط}$$

اب زور ق پر غور کرو۔ اب پر اس کا مماسی جزوِ تحلیلی ف کے جزوِ تحلیلی کی مخالف سمت میں ہوگا اور چونکہ اس صورت میں رقبہ $\frac{1}{\text{جب (۹۰-ط)}} = \frac{1}{\text{جم ط}}$ اور ق کے

عمادی اور مماسی اجزائے تحلیلی علی الترتیب ق جم طہ اور ق جب طہ ہونگے اس لیے
زور کا عمادی جزوِ تحلیلی ق جم^2 طہ اور مماسی جزوِ تحلیلی - ق جب طہ جم طہ ہوگا
کیونکہ یہ مماسی جزوِ تحلیلی ف کے مماسی جزوِ تحلیلی کی مخالف سمت میں ہے۔

∴ مجموعی عمادی جزوِ تحلیلی = زع = ف جب^2 طہ + ق جم^2 طہ ...... (۱)

اور ″ مماسی ″ ″ = زم = (ف - ق) جب طہ جم طہ ..... (۲)

ان زوروں زع اور زم کا حاصل ز خط اج سے تعبیر ہوگا۔

اور ز = √(زع^2 + زم^2)

= √((ف جب^2 طہ + ق جم^2 طہ)^2 + (ف - ق)^2 جب^2 طہ جم^2 طہ)

= √{ف^2 (جب^4 طہ + جب^2 طہ جم^2 طہ) + ق^2 (جم^2 طہ جب^2 طہ + جم^4 طہ) + ۲ ف ق (جم^2 طہ جب^2 طہ - جم^2 طہ جب^2 طہ)}

= √{ف^2 جب^2 طہ (جم^2 طہ + جب^2 طہ) + ق^2 جم^2 طہ (جب^2 طہ + جم^2 طہ) + ۰}

= √(ف^2 جب^2 طہ + ق^2 جم^2 طہ) .... (۳)

کیونکہ جم^2 طہ + جب^2 طہ = ۱

اس زور کا میلان اب سے ع ہو تو

مس ع = زع / زم = (ف جب^2 طہ + ق جم^2 طہ) / ((ف - ق) جب طہ جم طہ)

= (ف مس^2 طہ + ق) / ((ف - ق) مس طہ) .... (۴)

اگر ا ج اور ف کی سمت کے درمیان زاویہ فہ ہو

تو $\text{فہ} = (\text{عہ} - \text{طہ})$

اور

$$\text{مس فہ} = \text{مس}(\text{عہ} - \text{طہ}) = \frac{\text{مس عہ} - \text{مس طہ}}{۱ + \text{مس عہ} \times \text{مس طہ}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{ف مس}^{۲}\,\text{طہ} + \text{ق}}{(\text{ف} - \text{ق})\,\text{مس طہ}} - \text{مس طہ}}{۱ + \dfrac{\text{ف مس}^{۲}\,\text{طہ} + \text{ق}}{(\text{ف} - \text{ق})\,\text{مس طہ}} \times \text{مس طہ}}$$

$$= \frac{\text{ف مس}^{۲}\,\text{طہ} + \text{ق} - (\text{ف} - \text{ق})\,\text{مس}^{۲}\,\text{طہ}}{(\text{ف} - \text{ق})\,\text{مس طہ} + \text{مس طہ}\,(\text{ف مس}^{۲}\,\text{طہ} + \text{ق})}$$

$$= \frac{\text{ق}\,(۱ + \text{مس}^{۲}\,\text{طہ})}{\text{ف مس طہ}\,(۱ + \text{مس}^{۲}\,\text{طہ})} = \frac{\text{ق}}{\text{ف مس طہ}}$$

یعنی $\text{مس فہ} = \frac{\text{ق}}{\text{ف}}\,\text{مم طہ}$ .... (۵)

زور کا ناقص (Ellipse)

ـــــ علی الترتیب ف اور ق کے مساوی نصف قطروں و لا اور و ما کے دائرے کھینچو (شکل ۶) اور و ما سے زاویہ طہ پر و س کھینچو۔

و س کے علی القوائم بڑے دائرے کا نصف قطر و ف کھینچو جو چھوٹے دائرے کو ع پر قطع کرے۔

و ما کے علی القوائم ف ہ اور ف ہ کے علی القوائم ع گ کھینچو اور و گ کو ملاؤ۔

اب $\text{و ہ} = \text{و ف جم}\,(۹۰^\circ - \text{طہ}) = \text{ف جب طہ}$

اور $\text{گ ہ} = \text{ع ک} = \text{و ع جب}\,(۹۰^\circ - \text{طہ}) = \text{ق جم طہ}$

∴ و گ = √(وہ² + ہ گ²) = √(ف² جب² طہ + ق² جم² طہ)

∴ مساوات (۳) سے و گ = ز

اب مس ہ و گ = ہ گ / و ہ = ق جم طہ / ف جب طہ = ق/ف مم طہ = مس فہ

∴ ∠ ہ و گ = فہ

اور چونکہ عہ = طہ + فہ

∴ ∠ گ و س = عہ

نقطہ گ کا طریق ایک ناقص ہوگا جس کا بڑا محور ۲ ف اور چھوٹا محور ۲ ق ہوگا اور یہ ناقص "زور کا ناقص" کہلاتا ہے۔

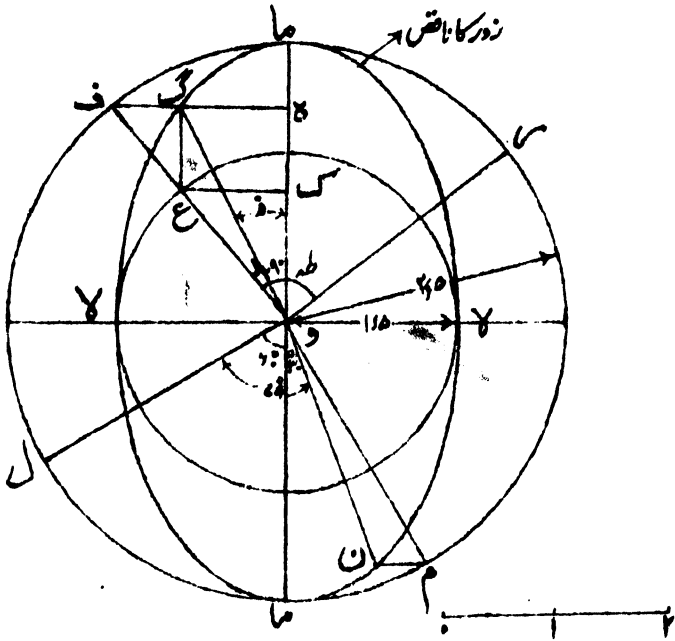
اس طرح دیکھو مرکز و سے ایک دی ہوئی سمت کے علی القوائم بڑے دائرے تک و ف کھینچ کر ف ہ افقاً کھینچیں جو زور کے ناقص کو گ پر ملے تو و گ اُس حاصل زور کو تعبیر کرتا ہے جو دی ہوئی سمت کے مستوی پر عمل کرتا ہے اور زاویہ گ و س = عہ سے اِس حاصل زور اور مستوی کا زاویہ تعبیر ہوتا ہے۔

عددی مثال ——— فرض کرو کہ ایک مربع سلاخ پر جس کا ضلع ۲ انچ ہے اور جو ۴ انچ لمبی ہے محوری اور عرضی سمتوں میں علی الترتیب ۱۰ اور ۱۲ ٹن کی کھینچیں عمل کرتی ہیں۔ اس مستوی پر حاصل زور معلوم کرو جو محور سے °۶۰ بنائے اور اِس زور کا اُس مستوی سے میلان معلوم کرو۔

اِس صورت میں ف = ۱۰/۴ = ۲٫۵ ٹن فی مربع انچ

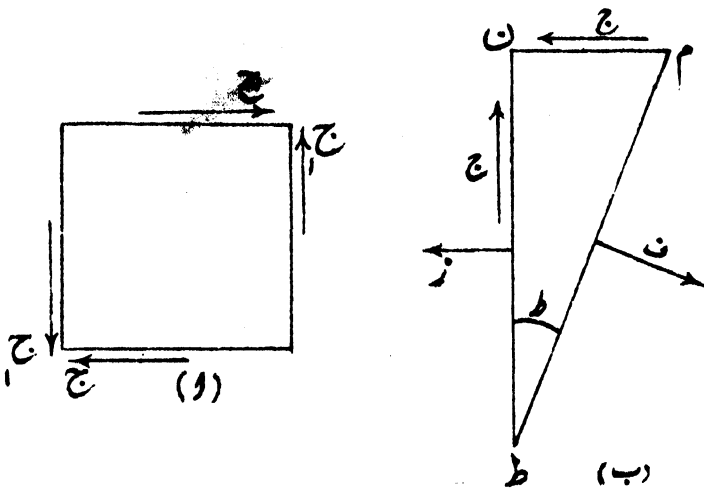
اور ق = ۱۲/۸ = ۱٫۵ 〃 〃 〃 〃

شکل ۶ع میں زور کا ناقص پیمانے کے ساتھ کھینچا گیا ہے۔

شکل ۶ع۔ زور کا ناقص

و ما سے ۹۰ پر د ل کھینچو اور د ل کے علی القوائم و م کھینچو جو بیرونی دائرے کو م پر قطع کرے۔ م ن افقاً کھینچو جو زور کے ناقص کو ن پر ملے۔ تب و ن حاصل زور کو تعبیر کریگا اور ل د ن اس کے اس مستوی سے میلان کو تعبیر کریگا۔ و ن = ۲٫۲۹ ٹن فی مربع انچ اور ل د ن = ۶۹ پائے جائینگے۔

اب پھر زوروں ف اور ق اور عمادی اور مماسی زوروں ن ع اور ن م پر غور کرو تو معلوم ہوگا کہ ف اور ق زوروں ن ع اور ن م کے متناظر صادر زور ہیں علاً اکثر یہ ہوگا کہ صدر زوروں کی مقدار اور میلان مطلوب ہونگے کیونکہ ایک صدر زور کی حدت اعظم حدت ہوگی۔ یہ زور کے ناقص کی شکل سے ظاہر ہے کیونکہ صریحاً و ما ناقص کا اعظم سمتی نیم قطر ہے۔ اس لیے اب ہم اس کا معکوس

عمل کرینگے یعنی ایک عمادی زور ز اور اُسکے علی القوائم ایک جزی یا مماسی زور ج کی وجہ سے پیدا ہونے والے صدر زور معلوم کرینگے۔

متحدہ عمادی اور جزی زور ـــــ اس مسئلہ سے بحث کرنے سے پہلے یہ ثابت کرنا ضروری ہے کہ کسی جزی زور کے ساتھ ایک مساوی جزی زور

شکل ۷۔ متحدہ عمادی اور جزی زور

اس کے علی القوائم موجود ہونا ضروری ہے۔ مثلاً ایک اکائی مکعب لو، شکل ۷ (ا) جس کے مقابل پہلوؤں پر جزی قوتیں ج عمل کرتی ہیں۔ یہ قوتیں ج مل کر ایک جفت ہونگی، اور مکعب کے تعادل کے لیے ضروری ہے کہ ایک اور جفت مساوی معیار اور مخالف جہت کا عمل کرے۔ یہ جفت جزی قوتوں ج، سے حاصل ہوگا جو ج کے علی القوائم عمل کریں۔

اب زور کے ایک مخلوط نظام پر غور کرو جو ایک عمادی زور ز اور ایک جزی یا مماسی زور ج پر مشتمل ہے۔

فرض کرو کہ ط ن، شکل ۷ (ب)، اس مستوی کے ایک حصّے کو تعبیر

کرتا ہے جس پر زور ز اور ج عمل کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک صدر زور کا مستوی ط م ہے اور یہ صدر زور ف ہے۔ تب م ن پر بھی ایک جزی زور حدت ج کا ہوگا۔

تب زور ف اور زوروں ز اور ج سے پیدا ہونے والی قوتوں کے اجزائے تحلیلی سمتوں ط ن اور م ن میں مساوی ہونے چاہییں۔ اس طرح

$$\text{ز} \times \text{ط ن} + \text{ج} \times \text{م ن} = \text{ف} \times \text{ط م جم ط} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اور

$$\text{ج} \times \text{ط ن} = \text{ف} \times \text{ط م جب ط} \quad \ldots\ldots (۲)$$

∴ (۱) سے

$$\text{ز} \frac{\text{ط ن}}{\text{ط م}} + \text{ج} \frac{\text{م ن}}{\text{ط م}} = \text{ف جم ط}$$

یا

$$\text{ز جم ط} + \text{ج جب ط} = \text{ف جم ط}$$

∴

$$(\text{ف} - \text{ز}) \text{جم ط} = \text{ج جب ط} \quad \ldots\ldots (۳)$$

(۲) سے

$$\text{ج} \frac{\text{ط ن}}{\text{ط م}} = \text{ف جب ط}$$

∴

$$\text{ج جم ط} = \text{ف جب ط} \quad \ldots\ldots (۴)$$

(۳) کو (۴) سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{ف} - \text{ز}}{\text{ج}} = \frac{\text{ج}}{\text{ف}}$$

یا

$$\text{ف} (\text{ف} - \text{ز}) = \text{ج}^{۲}$$

یا

$$\text{ف}^{۲} - \text{ز ف} - \text{ج}^{۲} = ۰$$

یا

$$\text{ف} = \frac{\text{ز}}{۲} \pm \frac{۱}{۲} \sqrt{\text{ز}^{۲} + ۴ \text{ج}^{۲}}$$

یا

$$\text{ف} = \frac{\text{ز}}{۲} \left(۱ \pm \sqrt{۱ + \frac{۴ \text{ج}^{۲}}{\text{ز}^{۲}}} \right) \quad \ldots\ldots (۵)$$

اس میں سے منفی علامت دوسرے صدر زور کے لیے ہے جو منفی یعنی فشاری ہوگا۔ ہم کو چونکہ صرف اعظم زور مطلوب ہے اس لیے مثبت علامت لینے سے

$$ف = \frac{ز}{۲}\left(۱ + \sqrt{۱ + \frac{۴ ج^{۲}}{ز^{۲}}}\right) \quad ......(۶)$$

یہ زور جس مستوی پر عمل کرتا ہے اس کی سمت طہ ہو گی جو اِس طرح حاصل ہو گی:—

(۳) سے $ف \text{ جم } طہ - ز \text{ جم } طہ = ج \text{ جب } طہ$

(۴) سے $ف \text{ جب } طہ = ج \text{ جم } طہ$

$$\therefore \quad ف = \frac{ج \text{ جم } طہ}{\text{جب } طہ}$$

$$\therefore \quad \frac{ج \text{ جم}^{۲} طہ}{\text{جب } طہ} - ز \text{ جم } طہ = ج \text{ جب } طہ \quad ......(۷)$$

$$\text{یا} \quad ج\left(\text{جم}^{۲} طہ - \text{جب}^{۲} طہ\right) = ز \text{ جب } طہ \text{ جم } طہ$$

$$\therefore \quad ج \text{ جم } ۲ طہ = ز \frac{\text{جب } ۲ طہ}{۲}$$

$$\text{یا} \quad \text{مس } ۲ طہ = \frac{۲ ج}{ز} \quad ......(۸)$$

اس سے طہ کی دو قیمتیں حاصل ہونگی جن میں ۹۰° کا فرق ہو گا۔ اِس طرح اِس سے صدر زور کے دونوں مستویوں کے میلان حاصل ہونگے۔

اعظم جزی زور —— صدر زوروں ف اور ق کی بحث میں دکھایا گیا تھا کہ ف سے طہ بنانے والے مستوی پر مماسی زور (ف-ق) جب طہ جم طہ ہوتا ہے۔ (دیکھو صفحہ ۲۰ مساوات (۲))۔ اب یہ اُس وقت اعظم ہو گا جب کہ جب طہ جم طہ اعظم ہو یعنی جبکہ $\frac{\text{جب } ۲ طہ}{۲}$ اعظم ہو یعنی جب کہ طہ = ۴۵° ہو۔ اس سے معلوم ہوا کہ اعظم جزی زور صدر زوروں سے ۴۵° پر واقع ہوتا ہے اور $\frac{ف - ق}{۲}$ کے مساوی ہوتا ہے۔

اس وقت جو مسئلہ زیر بحث ہے اس میں ثابت کیا گیا ہے کہ

$$\text{ف} = \frac{\text{ز}}{۲}\left(۱ + \sqrt{۱ + \frac{۴\,\text{ج}^{۲}}{\text{ز}^{۲}}}\right)$$

اور

$$\text{ق} = \frac{\text{ز}}{۲}\left(۱ - \sqrt{۱ + \frac{۴\,\text{ج}^{۲}}{\text{ز}^{۲}}}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ف} - \text{ق}}{۲} = \frac{\text{ز}}{۲}\sqrt{۱ + \frac{۴\,\text{ج}^{۲}}{\text{ز}^{۲}}}$$

$$\therefore \quad \text{اعظم جزی زور} = \frac{\text{ز}}{۲}\sqrt{۱ + \frac{۴\,\text{ج}^{۲}}{\text{ز}^{۲}}} \quad \ldots\ldots\ldots (۹)$$

$$\text{یا} \quad = \sqrt{\frac{\text{ز}^{۲}}{۴} + \text{ج}^{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

(۹) اور (۱۰) میں (۱۰) زیادہ کارآمد ہے کیونکہ ز = ۰ کی صورت میں (۹) سے غیر معین نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

عددی مثال —— ۱ انچ قطر کے ایک فولادی بولٹ پر ۳۰۰۰ پونڈ کی ایک راست کھینچ اور ۱ ٹن کی ایک جزی قوت عمل کرتی ہے۔ اعظم تنشی اور جزی زور پونڈ فی مربع انچ میں اور ان زوروں کی سمت کا میلان بولٹ کے طولی محور سے معلوم کرو۔ (بی۔ ایس سی لندن ۱۹۰۷ء)۔

$$\text{موجودہ صورت میں ز} = \frac{۳۰۰۰}{\text{۱ انچ بولٹ کا رقبہ}} = \frac{۳۰۰۰}{.۷۸۵۴}$$

$$= ۳۸۱۹ \ \text{پونڈ فی مربع انچ}$$

$$\text{اور} \quad \text{ج} = \frac{۲۲۴۰}{.۷۸۵۴} = ۲۸۵۲ \ \text{پونڈ فی مربع انچ}$$

$$\therefore \quad \text{اعظم تنشی زور} = \text{ف} = \frac{\text{ز}}{۲}\left(۱ + \sqrt{۱ + \frac{۴\,\text{ج}^{۲}}{\text{ز}^{۲}}}\right)$$

$$= \frac{۳۸۱۹}{۲}\left(۱+\sqrt{۱+\frac{(۲۸۵۲)^{۲}\times ۴}{(۳۸۱۹)^{۲}}}\right)$$

$$= \frac{۳۸۱۹}{۲}\left(۱+\sqrt{۱+۲٫۲۲۳}\right)$$

$$= \frac{۳۸۱۹}{۲}\left(۱+۱٫۷۹۶\right)$$

= ۵۳۴۲ پونڈ فی مربع انچ

صدر مستوی کا میلان محور کے علی القوائم سے طہ ہو تو

$$\text{مس } ۲\,\text{طہ} = \frac{۲\,\text{ج}}{\text{ز}} = \frac{۲۸۵۲\times ۲}{۳۸۱۹}$$

$$= ۱٫۴۹۴$$

∴ ۲ طہ = ۵۶° ۱۲′ تقریباً

طہ = ۲۸° ۶′

∴ طولی محور سے میلان = ۹۰° − ۲۸° ۶′

= ۶۱° ۵۴′

$$\text{اعظم جزی زور} = \sqrt{\frac{\text{ز}^{۲}}{۴}+\text{ج}^{۲}}$$

$$= \sqrt{(۲۸۵۲)^{۲}+\frac{(۳۸۱۹)^{۲}}{۴}}$$

$$= ۲۸۵۲\sqrt{۱+\frac{(۳۸۱۹)^{۲}}{(۲۸۵۲)^{۲}\times ۴}}$$

$$= ۲۸۵۲\sqrt{۱+٫۴۴۸}$$

$$= ۱٫۲۰۱\times ۲۸۵۲$$

= ۳۴۲۸ پونڈ فی مربع انچ

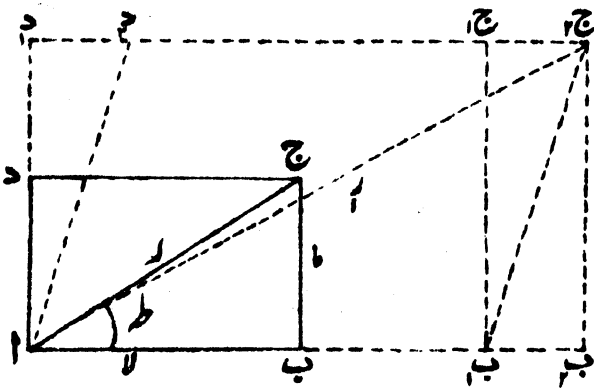
یہ زور صدر زور کی سمت سے ۴۵° پر یعنی
۶۱° ۴۴′ − ۴۵° = ۱۶° ۴۴′ پر طولی محور سے ہوگا۔

اور یا اس سے ۹۰° پر یعنی طولی محور سے ۷۳° ۱۶′ پر ہوگا۔

* اعظم فساد کا مقابلہ اعظم زور کے ساتھ

مخلوط زوروں کے مسائل میں یہ خیال رہے کہ اعظم فساد کے لحاظات اعظم زور سے مختلف ہوتے ہیں۔ لچک کے ماہرین کے درمیان [illegible] خاصا اختلاف ہے کہ کسی تعمیر کی سلامتی آیا تنشی یا فشاری زور کے ایک خاص حد کے اندر رہنے پر یا جزی زور کے ایک خاص حد کے اندر رہنے پر یا فساد کے ایک خاص حد کے اندر رہنے پر موقوف ہے۔

اعظم تنشی یا فشاری اور جزی زور پر غور کیا جا چکا ہے۔ اب ہم اعظم فساد کے سوال پر غور کرینگے۔

فرض کرو کہ ایک مستطیلی کندے ا ب ج د کو دو علی القوائم تنشی فساد اور ایک جھیل فساد اُسی مستوی میں پہنچائے جاتے ہیں۔

شکل عشہ۔ متحدہ فساد

اس مخلوط فساد کے تحت کُندا وضع ا ب۱ ج۱ د۲ اختیار کریگا۔ تب اگر ا ب = لا، ب ج = ما اور ا ج = ر، اور فساد کے بعد یہ طول لا۱، ما۱، ر۱ ہو جائیں اور ∠ د۱ ا د۲ = بہ تو

سمت لا میں اکائی کا فساد = $س_{لا} = \frac{لا_1 - لا}{لا}$

" ما " " " = $س_{ما} = \frac{ما_1 - ما}{ما}$

" ر " " " = $س_{ر} = \frac{ر_1 - ر}{ر}$

یا $لا_1 = لا(1 + س_{لا})$ .... (۱)

$ما_1 = ما(1 + س_{ما})$ .... (۲)

$ر_1 = ر(1 + س_{ر})$ .... (۳)

∴ $ر_1^2 = ر^2(1 + 2س_{ر} + س_{ر}^2)$

$= ر^2(1 + 2س_{ر})$ .... (۴)

کیونکہ فسادوں کی دوسری قوت نظر انداز کی جاسکتی ہے۔

اب $ر_1^2 = ا ج_1^2 = ا ب_1^2 + ج_1 ب_1^2$

$= (ا ب_1 + ب_1 ب_2)^2 + ا د_1^2$

$= (ا ب_1 + د_1 د_2)^2 + ا د_1^2$

اس میں $ا ب_1 = لا_1 = لا(1 + س_{لا})$

$ا د_1 = ما_1 = ما(1 + س_{ما})$

$د_1 د_2 = ما_1 \times بہ = بہ\, ما(1 + س_{ما}) = بہ\, ما$

کیونکہ بہ چھوٹا ہے اور اس طرح بہ × سہ دوسرے رُتبے کی چھوٹی مقدار ہوگی جو نظر انداز کی جا سکتی ہے۔

$$\therefore\ \text{رَ}^{2} = \{\text{لا}(1+\text{سلا}) + \text{بہ ما}\}^{2} + \{\text{ما}(1+\text{سما})\}^{2}$$

$$= \text{لا}^{2}(1+2\,\text{سلا}) + 2\,\text{بہ لا ما} + \text{ما}^{2}(1+2\,\text{سما}) \quad \ldots\ldots (5)$$

جس میں فسادوں کی دوسری قوتوں کو نظر انداز کر دیا گیا ہے،

لیکن $\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} = \text{رَ}^{2}$

$$\therefore\ \text{رَ}_{1}^{2} = \text{رَ}^{2} + 2\,\text{لا}^{2}\,\text{سلا} + 2\,\text{ما}^{2}\,\text{سما} + 2\,\text{بہ لا ما} \quad \ldots\ldots (6)$$

$\therefore$ (۴) سے

$$\text{رَ}^{2}(1+2\,\text{سر}) = \text{رَ}^{2} + 2\,\text{لا}^{2}\,\text{سلا} + 2\,\text{ما}^{2}\,\text{سما} + 2\,\text{بہ لا ما}$$

$$\text{یا}\quad \text{سر} = \left(\frac{\text{لا}}{\text{ر}}\right)^{2}\text{سلا} + \left(\frac{\text{ما}}{\text{ر}}\right)^{2}\text{سما} + \frac{\text{لا ما}}{\text{ر}^{2}}\,\text{بہ} \quad \ldots\ldots (7)$$

اس کو زاویہ طہ کی رقوم میں بیان کریں تو یہ حاصل ہوتا ہے:۔

$$\text{سطہ} = \text{سلا}\,\text{جم}^{2}\,\text{طہ} + \text{سما}\,\text{جب}^{2}\,\text{طہ} + \text{بہ جب طہ جم طہ} \quad \ldots\ldots (8)$$

اب ہم کو طہ کی وہ قیمت معلوم کرنا ہے جس کے لیے حاصل اکائی کا فساد سطہ اعظم ہو۔

یہ اس وقت ہوگا جب کہ $\dfrac{\text{فرسطہ}}{\text{فرطہ}} = 0$

یعنی جب کہ

$$\text{سلا} \times 2\,\text{جم طہ}(-\text{جب طہ}) + \text{سما} \times 2\,\text{جب طہ جم طہ} + \text{بہ}\{\text{جم طہ جم طہ} + \text{جب طہ}(-\text{جب طہ})\} = 0$$

$$\text{یعنی جبکہ}\quad -\text{سلا جب}\,2\,\text{طہ} + \text{سما جب}\,2\,\text{طہ} + \text{بہ جم}\,2\,\text{طہ} = 0$$

$$\text{یعنی}\quad (\text{سلا} - \text{سما})\,\text{جب}\,2\,\text{طہ} = \text{بہ جم}\,2\,\text{طہ}$$

$$\text{یا}\quad \text{مس}\,2\,\text{طہ} = \frac{\text{بہ}}{\text{سلا} - \text{سما}} \quad \ldots\ldots (9)$$

اس سے طہ کی دو قیمتیں علی القوائم حاصل ہوتی ہیں جس سے معلوم ہوتا ہے کہ اعظم فساد کی سمتیں باہم علی القوائم ہیں۔

اب مساوات (۸) پر غور کرو۔ $\text{۱} = \text{جم}^{2}\,\text{طہ} + \text{جب}^{2}\,\text{طہ}$ رکھ کر اس کو یوں لکھ سکتے ہیں:-

$$\text{س}_{\text{ط}}(\text{جم}^{2}\,\text{طہ} + \text{جب}^{2}\,\text{طہ}) = \text{س}_{\text{ل}}\,\text{جم}^{2}\,\text{طہ} + \text{س}_{\text{ا}}\,\text{جب}^{2}\,\text{طہ} + \text{ب}\,\text{جب طہ جم طہ}$$

$\text{جم}^{2}\,\text{طہ}$ سے تقسیم کرنے سے

$$\text{س}_{\text{ط}}(\text{۱} + \text{مس}^{2}\,\text{طہ}) = \text{س}_{\text{ل}} + \text{س}_{\text{ا}}\,\text{مس}^{2}\,\text{طہ} + \text{ب}\,\text{مس طہ}$$

یا
$$\text{مس}^{2}\,\text{طہ}(\text{س}_{\text{ا}} - \text{س}_{\text{ط}}) + \text{ب}\,\text{مس طہ} + \text{س}_{\text{ل}} - \text{س}_{\text{ط}} = \text{۰}$$

یا
$$\text{مس طہ} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{2} - \text{۴}(\text{س}_{\text{ا}} - \text{س}_{\text{ط}})(\text{س}_{\text{ل}} - \text{س}_{\text{ط}})}}{\text{۲}(\text{س}_{\text{ا}} - \text{س}_{\text{ط}})}$$

اس کے حقیقی ہونے کے لیے ضروری ہے کہ

ب^{2} چھوٹا نہ ہو $\text{۴}(\text{س}_{\text{ا}} - \text{س}_{\text{ط}})(\text{س}_{\text{ل}} - \text{س}_{\text{ط}})$ سے

اب دیکھو $\text{س}_{\text{ط}}$ کے بڑھنے سے $\text{۴}(\text{س}_{\text{ا}} - \text{س}_{\text{ط}})(\text{س}_{\text{ل}} - \text{س}_{\text{ط}})$ بڑھیگا کیونکہ یہ جملہ $= \text{۴}(\text{س}_{\text{ط}} - \text{س}_{\text{ا}})(\text{س}_{\text{ط}} - \text{س}_{\text{ل}})$

$\therefore$ $\text{س}_{\text{ط}}$ کی قیمت اس سے زیادہ نہ ہونی چاہیے جس سے $\text{ب}^{2} = \text{۴}(\text{س}_{\text{ا}} - \text{س}_{\text{ط}})(\text{س}_{\text{ل}} - \text{س}_{\text{ط}})$

یا
$$\text{س}_{\text{ط}}^{2} - \text{س}_{\text{ط}}(\text{س}_{\text{ل}} + \text{س}_{\text{ا}}) + \text{س}_{\text{ل}}\,\text{س}_{\text{ا}} - \frac{\text{ب}^{2}}{\text{۴}} = \text{۰}$$

یا
$$\text{س}_{\text{ط}} = \frac{\text{س}_{\text{ل}} + \text{س}_{\text{ا}} \pm \sqrt{(\text{س}_{\text{ل}} - \text{س}_{\text{ا}})^{2} + \text{ب}^{2}}}{\text{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots(\text{۱۰})$$

اب اس صورت پر غور کرو جس کے لیے ہم صدر زور حاصل کر چکے ہیں یعنی

ایک تنشی یا فشاری زور ز اور ایک جزی زور ج۔ اس صورت میں اگر $س_ا$ = زور ز کی وجہ سے فساد، تو سمت ۱ میں فساد صرف $س_ا$ کا عرضی فساد ہوگا یعنی $س_۲ = -عا \times س_ا$ (منفی اس لیے کہ عرضی فساد فشاری ہوگا)۔
مساوات (۱۰) میں صرف مثبت قیمت لینے سے اس صورت میں

$$س_ط = \frac{س_ا(۱-عا) + \sqrt{س_ا^۲(۱+عا)^۲ + ب^۲}}{۲}$$

اب $س_ا = \frac{ز}{ے}$ اور $ب = \frac{ج}{س}$

نیز $س_ط = \frac{ف_ا}{ے}$، جہاں $ف_ا$ معادل زور ہے جو اعظم فساد کے لحاظ سے ہو۔ ے اور س ینگ کا اور جزی مقیاس ہیں۔

$$\therefore \frac{ف_ا}{ے} = \frac{ز(۱-عا)}{۲ے} + \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{ز^۲}{ے^۲}(۱+عا)^۲ + \frac{ج^۲}{س^۲}}$$

$$= \frac{ز}{۲ے}\left\{(۱-عا) + \sqrt{(۱+عا)^۲ + \frac{ج^۲ ے^۲}{ز^۲ س^۲}}\right\}$$

لیکن $\frac{ے}{س} = ۲(۱+عا)$

$$\therefore ف_ا = \frac{ز}{۲}\left\{(۱-عا) + (۱+عا)\sqrt{۱ + \frac{۴ج^۲}{ز^۲}}\right\} \quad ......(۱۱)$$

عا کی قیمت فولاد کے لیے تقریباً $\frac{۱}{۴}$ ہے۔ اس لیے اس کو اختیار کرنے سے

$$ف_ا = \frac{ز}{۲}\left(\frac{۳}{۴} + \frac{۵}{۴}\sqrt{۱ + \frac{۴ج^۲}{ز^۲}}\right) \quad ....(۱۲)$$

اِس کا مقابلہ مساوات (۶) (صفحہ ۲۶) سے کریں جس میں زور پر غور کیا گیا ہے تو دونوں نقاطِ نظر سے حاصل ہونے والے نتائج کا فرق واضح

ہو جاتا ہے۔

عددی مثال ۔۔ اُسی سوال پر غور کرو جو صفحہ ۲۷ پر حل کیا گیا ہے۔

اِس صورت میں ز = ۳۸۱۹ پونڈ فی مربع انچ
ج = ۲۸۵۲ " " "

$$\therefore \; ف_۱ = \frac{۳۸۱۹}{۲}\left(\frac{۳}{۴} + \frac{۵}{۴}\sqrt{۱ + \frac{۴ \times (۲۸۵۲)^۲}{(۳۸۱۹)^۲}}\right)$$

$$= \frac{۳۸۱۹}{۲}\left(\frac{۳}{۴} + \frac{۵}{۴}\sqrt{۳{,}۲۳}\right)$$

$$= \frac{۳۸۱۹}{۲}\left(۰{,}۷۵ + ۲{,}۲۴۶\right)$$

$$= \frac{۳۸۱۹}{۲} \times ۲{,}۹۹۶$$

$$= ۵۷۲۲ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

اعظم فساد کی سمت معلوم کرنے کے لیے مساوات (۹) پر واپس آؤ۔
اس سے

$$مس\,۲\,ط = \frac{ب}{س_۱ - س_۱}$$

اِس صورت میں

$$= \frac{\frac{ج}{س}}{س_۱(۱ + عا)} = \frac{\frac{ج}{س}}{\frac{ز(۱ + عا)}{ے}}$$

$$= \frac{ج \times ے}{ز(۱ + عا) \times س}$$

$$= \frac{ج \times ۲(۱ + عا)}{ز(۱ + عا)} = \frac{۲ج}{ز}$$

اور یہ وہی صدر زور کی سمت ہے اس لیے ط کی وہی قیمت حاصل ہوگی جو صدر زور کے لیے آچکی ہے۔

مخلوط زوروں کا لحاظ کرنے کے اس طریقے کو مصنف نے اس قدر تفصیل کے ساتھ اس لیے لکھا ہے کہ اکثر درسی کتابوں میں اس کا حوالہ تک نہیں دیا جاتا۔ اس طریقے میں ف وہ سادہ تنشی زور ہے جس سے کسی شے میں وہی فساد پیدا ہوگا جو دیے ہوئے مخلوط زوروں سے پیدا ہونے والا اعظم فساد ہے اور اس طرح اس کو ان مخلوط زوروں کا معادل زور سمجھا جاسکتا ہے۔

یہ اعظم فساد کا طریقہ، جس کو اعظم زور یا رنیکن کے طریقے سے تمیز کرنے کے لیے سان وینان[1] کا یا فرانسیسی طریقہ کہ سکتے ہیں، انگلستان میں عام طور پر معلوم نہیں لیکن لچک کے نظریے کے ممتاز ماہر اس کے استعمال کے بہت حامی ہیں۔

حال ہی اس مضمون پر ہین کاک[2]، اسکوبل[3]، سمتھ[4]، اور ٹرنر[5] جیسا جان[6] نے بہت احتیاط کے ساتھ تجربات کیے ہیں اور ان تجربات کے عام نتائج سے اس کی بڑی تائید ہوتی ہے کہ مخلوط زوروں کے حسابات کے لیے اعظم جزی زور کا یعنی "گسٹ کا نظریہ" اختیار کیا جائے۔ اس نظریے سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خالص جزی عملی زور خالص تناؤ سے نصف ہونا چاہیے۔ یہ مساوات (۱۰) صفحہ ۲۷ میں ج = ۰ رکھنے سے نظر آجائیگا۔ یہ ایک بہت اہم نکتہ ہے جس کو عملی مجوزوں نے اب تک محسوس نہیں کیا ہے۔ یا تو ہمارے جزی زوروں کو گھٹانا چاہیے یا تنشی زوروں کو بڑھانا چاہیے۔

بازگشتگی ——— فساد پیدا کرنے میں کسی شے کے فی اکائی حجم جو کام کیا جائے وہ بازگشتگی کہلاتا ہے۔ ایک جسم پر غور کرو جس پر سادہ تنشی فساد

---

[1] St. Venant [2] Hancock [3] Scoble
[4] C.A.M. Smith [5] Turner [6] Guest

عمل کرتا ہے۔ نقطہ ا سے بہت قریب کے نقطہ ب تک جانے میں (شکل ۔ ۹) عمل کرنے والا اوسط زور ز ہے۔ اس لیے اگر ا ب = لا تو قوت ز کا کام شے میں ا سے ب تک فساد پیدا کرنے میں ز × لا ہوگا۔ اب اگر لا اکائی کے فساد کا اضافہ ہو اور ز زور کی حدت ہو تو شے کا حجم جس پر عمل ہوا ہے اکائی ہے۔ اب چونکہ ا ب بہت چھوٹا فرض کیا گیا ہے اس لیے ز × لا زور اور فساد کے منحنی کے سایہ دار حصے کے رقبے کے مساوی ہوگا۔

اس لیے بازگشتگی مساوی ہے زور اور فساد کے منحنی کا رقبہ نقطہ م تک

یعنی بازگشتگی = ∆ ط م و کا رقبہ

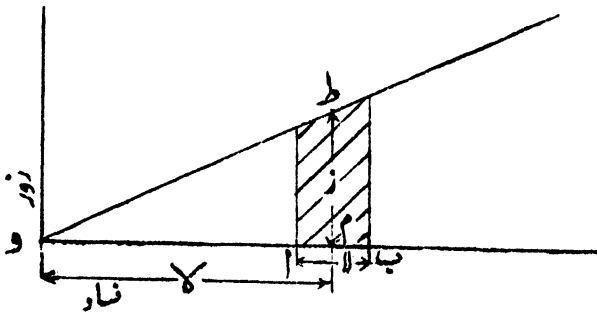
$= \frac{1}{2}$ ز × لا

لیکن $\frac{ز}{لا}$ = ینگ کا مقیاس = ے

∴ لا = $\frac{ز}{ے}$

∴ تناؤ میں بازگشتگی = $\frac{ز^2}{2ے}$

اسی طرح جز میں بازگشتگی = $\frac{ج^2}{2س}$

جہاں ج جزی زور ہے۔

شکل ۔ ۹ ۔ بازگشتگی

زور کی تکرار یا تغیر

زور کی تکرار یا تغیر ——— تعمیروں کی تجویز میں ایسی صورتوں سے اکثر سابقہ پڑتا ہے جن میں زور کی مقدار وقت کے لحاظ سے بدلتی رہتی ہے۔ یہ صورتیں ایسی تعمیروں میں پیش آتی ہیں جن کو ہوا کا دباؤ یا متحرک بوجھ برداشت کرنا ہوتا ہے۔ حال میں ایسی اشیاء کی مضبوطی پر بہت تحقیقات کی گئی ہے جن پر متبادل زور عمل کرتے ہیں۔ کسی شے کو بتدریج بڑھتے ہوئے زور سے توڑنے میں جو زور درکار ہو وہ "سکونی شکستی زور" کہلاتا ہے اور وہی زور ہے جو معمولی امتحانی مشینوں سے حاصل ہوتا ہے۔

فیربیرن[1] نے پٹواں لوہے کے گرڈروں کی چند آزمایشوں کے سلسلے میں دریافت کیا کہ کسی گرڈر کو ایک بوجھ بار بار لگا کر توڑنے کے لیے سکونی شکستی بوجھ کا تقریباً نصف بوجھ کافی ہے۔

اس مضمون پر پہلی مکمل تحقیق وولر[2] نے پرشیا[3] (جرمنی) کی وزارت تجارت کی فرمایش پر کی جو ۱۸۷۰ء میں شایع ہوئی۔ وولر بارہ سال تک تجربے کرتا رہا اس کے حاصل کردہ نتائج اُس زمانے میں بہت چونکا دینے والے تھے اور ان کی اہمیت انجینیروں نے بہت حال ہی میں محسوس کی ہے۔

ان تجربات سے اور ان کے بعد کے تجربات سے یہ ظاہر ہوا کہ کسی شے کو تکراری زور سے توڑنے کے لیے سکونی زور سے بہت کم زور درکار ہوتا ہے۔

وولر کے تجربات میں جو تناؤ، خماؤ اور مروڑ میں کیے گئے زور کے بعض تغیر تناؤ یا فشار میں صفر سے ایک اعظم قیمت تک تھے اور بعض میں زور پورا معکوس کیا گیا۔

تجربات کا پورا بیان اَنون کی[4] "اشیاءے تعمیر کی آزمائش" میں ملیگا۔

---

[1] Fairbairn [2] Wöhler [3] Prussia

[4] Unwin's Testing of The Materials of Construction

ہم اس کے نتائج کی چند مثالیں لینگے:۔

کرپ[1] کا دھرا فولاد:۔

سکونی شکستی زور = ۵۲ ٹن فی مربع انچ

شکستی زور صفر سے اعظم تک = ۲۶،۵ " "

" " متعاکس زور کے لیے = ۱۴،۰۵ " "

پٹواں لوہا:۔

سکونی شکستی زور = ۲۲،۸ ٹن فی مربع انچ

شکستی زور صفر سے اعظم = ۱۵،۲۵ " "

" " متعاکس زور کے لیے = ۸،۶ " "

پہلی صورت میں زور کی وسعت ایک صورت میں ۲۶،۵ اور تعاکس کی صورت میں ۱۴،۰۵- سے ۱۴،۰۵+ تک یعنی ۲۸،۱ ہے۔ دوسری صورت میں وسعتیں ۱۵،۲۵ اور ۱۷،۲ ہیں۔

سر بنجمن بیکر[2] نے اسی طرح کے تجربات انگلستان میں کیے اور اسی طرح کے نتائج حاصل ہوئے۔

۲۶،۸ تا ۲۸،۶ ٹن فی مربع انچ کی سکونی مضبوطی کے نرم فولاد کے لیے ان کو زور کے تعاکس کی صورت میں شکستی زور ۱۱،۶ ٹن فی مربع انچ حاصل ہوا۔

باؤشنگر[3] نے بہت سے تجربات وولر[4] کے نہج پر کیے اور اس سے زیادہ اشیا کا امتحان کیا۔

بسمر (Bessemer) فولاد کے لیے اس کے نتائج یہ تھے:۔

سکونی شکستی زور = ۲۸،۶ ٹن فی مربع انچ

شکستی زور صفر سے اعظم = ۱۵،۷ " "

" متعاکس زور کے لیے = ۸،۵۵ " "

---

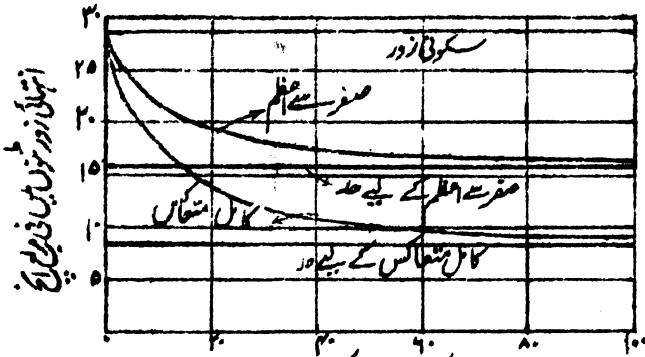
[1] Krupp

[2] Sir Benjamin Baker

[3] Bauschinger

[4] Wöhler

زور کے تغیر کے ان شکستی زوروں کے متعلق یہ معلوم ہو کہ یہ وہ کم سے کم زور ہیں جن پر نمونہ بہت بڑی تکرار کے بعد ٹوٹتا ہے۔

اس قسم کی آزمائشوں کے لیے یہ کیا جاتا ہے کہ بہت سے نمونے لیے جاتے ہیں اور مختلف نمونوں یا ان کے مختلف سٹوں کے لیے زور کے تغیر

شکل ۱۰ - زور کی تکراریں

کی وسعت مختلف رکھی جاتی ہے۔ جب یہ وسعت ایک خاص حد سے کم ہو تو نمونہ تجربے کی مدت میں نہیں ٹوٹتا۔ نتائج کو ایک نقشے کے ذریعے دکھایا جاتا ہے جس میں زور کی وسعت تکرار کی اس تعداد کے بالمقابل ترسیم کی جاتی ہے جو شکستگی کے لیے درکار ہوتی ہے۔ یا اگر تغیر صفر سے اعظم تک ہو یا زور پورا انعکاس ہو تو تکرار کی تعداد کے بالمقابل زور کی حد کو ترسیم کیا جاتا ہے۔ اس طرح کا ایک منحنی شکل ۱۰ میں دکھایا گیا ہے۔ ان منحنیوں سے وہ ظاہری زور حاصل ہوتا ہے جس کی بے انتہا تکرار شکستگی کے بغیر کی جا سکتی ہے اور اسی کو اکمل شکستی زور سمجھا جاتا ہے۔ "ظاہر" کا لفظ اس لیے استعمال کیا گیا ہے کہ ۵ کرور سے زیادہ تکرار کا کوئی حوالہ موجود نہیں اور یہ خیال ہے کہ اگر اس سے زیادہ تکرار کی جائے تو ممکن ہے کہ اس سے بھی پست تر زور حاصل ہوں۔

باؤشنگر[1] نے خیال ظاہر کیا کہ کوئی شے زور کی جو وسعت برداشت کر سکتی ہے اس میں اور اس کی لچک کی حد میں کوئی ربط ہے۔ اس لچک کی حد سے

[1] Bauschinger

اس کی مراد اس کے الفاظ میں "لچک کی طبعی حد" تھی یعنی وہ حد جو شے زور کے تغیرات کے تحت آنے کے بعد رکھے کیونکہ یہ معلوم ہے کہ کسی شے میں زور ایک خاص حد سے زیادہ کیا جائے تو اس کی لچک کی حد بدل جاتی ہے۔

ڈاکٹر اسٹینٹن[۱] اور مسٹر بیرسٹو[۲] نے

(انسٹی ٹیوٹ آف سول انجنیرز کی روداد جلد ۱۶۶ میں)

اس مسئلے پر ایک اہم مضمون شایع کیا ہے جس میں نیشنل فزیکل لباریٹری میں کیے ہوئے تجربات کے نتائج دیے ہیں۔

اُنھوں نے ایسی مشین استعمال کی جس میں نمونہ ایک بھاپ انجن کے میکانیے میں "فشارہ ڈنڈے" کے ایک حصے کے طور پر استعمال کیا گیا۔ اس طرح نمونہ راست زور کے تعاکس کے تحت آیا اور انتہائی زوروں کا تغیر میکانیے کے اضافی ابعاد کو بدلنے سے حاصل کیا گیا۔

اس تحقیق کے چند اہم نتائج ہیں جن میں سے قابلِ ذکر یہ ہیں:—

(ا) تکرار کی رفتار کو ۶۰ سے ۸۰۰ فی منٹ تک بدلنے سے نتائج پر کوئی نمایاں اثر نہیں پڑتا۔

(ب) زور کی وسعت جو متوسط بیش کاربن فولاد برداشت کر سکتے ہیں کم کاربن فولاد اور پٹواں لوہے سے مقابلۃً زیادہ ہے۔ اس سے ووہلر[۳] کی رائے کی تائید ہوتی ہے۔

(ج) لوہے اور فولاد کا انتہائی زور، زور کی وسعت پر منحصر ہے اور زوروں کی حقیقی قیمت پر تقریباً بالکل منحصر نہیں۔

اگرچہ ڈاکٹر اسٹینٹن اور مسٹر بیرسٹو کو اس سے اتفاق ہے کہ کوئی قطعی بیان دینے سے پہلے اور تحقیق کرنے کی ضرورت ہے لیکن ان کے تجربات سے باؤشنگر کے لچک کی حدوں کے نظریے کی تائید ہوتی ہے۔

---

[۱] Dr. Stanton

[۲] Mr. Bairstow

[۳] Wöhler

انہوں نے یہ بھی معلوم کیا کہ کسی شے میں تراش کی ایک دم تبدیلی کی صورت میں تدریجی تبدیلی کی بہ نسبت زور کے تعاکس کی برداشت کم ہوتی ہے۔

ڈاکٹر اسمتھ[۱] اور پروفیسر رینلڈز[۲] نے معلوم کیا کہ ۱۳۰۰ تا ۱۶۰۰ فی منٹ کی رفتاروں کے لیے وسعت وولر کی ۶۰ فی منٹ کی رفتار پر کی وسعت سے کم ہے اور یہ کمی تقریباً ۱۰ فیصدی ہے۔ ۱۹۰۰ تا ۲۴۰۰ فی منٹ کی رفتاروں کے لیے یہ کمی بہت زیادہ ہے اور وسعت وولر کی رفتار پر کی وسعت سے تقریباً ۴۰ فیصدی کم ہے۔

حال میں ایڈن[۳]، ھے[۴]، ہینکنز[۵]، کامرز[۶]، روس[۷]، اسٹینٹن[۸] اور مور[۹] نے جو تحقیق کی ہے اس سے پتہ چلتا ہے کہ زور کی انتہائی وسعت پر زور کے تغیر کا اثر تقریباً قابل نظر انداز ہے اور یہ کہ اسمتھ اور رینلڈز نے رفتار کا جو اثر معلوم کیا وہ غالباً ثانوی زوروں کی وجہ سے تھا جو اُن کی امتحانی مشینوں سے مخصوص تھے۔

اس مضمون کے مکمل بیان کے لیے قارئین ڈاکٹر گاف[۱۰] کی کتاب "دھاتوں کی تھکن"[۱۱] اور اُن کے اس کتاب کے بعد لکھے ہوئے ایک مضمون کا مطالعہ کریں جو رسالہ "تعمیری انجینیر" (Structural Engineer) (مارچ ۱۹۲۷ء) میں شایع ہوا۔

ڈھلا لوہا۔ ڈھلے لوہے کے لیے زور کی تکرار پر غالباً بہت کم کام کیا گیا ہے لیکن مصنف نے جو چند تجربات خماؤ کے ذریعے تعاکس پر کیے اُن سے یہی عام نتائج حاصل ہوئے انتہائی شکستی زور سکونی زور کا تقریباً $\frac{1}{4}$ حاصل ہوا۔

---

۱ Dr. J. H. Smith ۔ ۲ Prof. Osborne Reynolds

۳ Eden ۔ ۴ Haigh ۔ ۵ Hankins

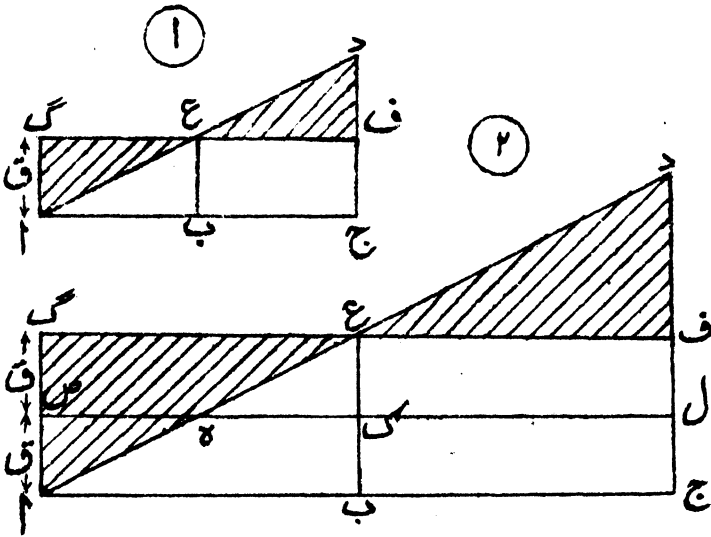
۶ Kommers ۔ ۷ Roos ۔ ۸ Stanton

۹ Moore ۔ ۱۰ Dr. H. J. Gough ۔ ۱۱ The Fatigue of Metals

فوری یا حرکیاتی لداؤ سے زور اور فساد۔ اگر کسی تعمیر پر ایک بوجھ دفعۃً لگایا جائے تو ارتعاش پیدا ہونگے اور فساد (اور اس طرح زور) اس کی دگنی قیمت کو پہنچینگے جو بوجھ کے بتدریج لگائے جانے سے ہوتی۔

یہ بات شکل ۱۱ (۱) کے نقشے کو دیکھنے سے واضح ہوگی جس میں قوت کو فساد کے بالمقابل ترسیم کیا گیا ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی لچکدار جسم پر بوجھ بتدریج لگایا جائے تو فساد اور راست زور کے بوجھ کے ربط کا منحنی ایک خطِ مستقیم ا د ہوگا اور

۱ د گ ع ف ق ا ب ج

۲ د گ ع ف ق ل ک ہ ق ا ب ج

شکل ۱۱۔ فوری یا حرکی لداؤ

اِس خط کے نیچے کے رقبے سے کسی خاص نقطے تک کیا ہوا کام تعبیر ہوگا۔ اب فرض کرو کہ ا گ ایک قوت ق کو تعبیر کرتا ہے۔ تو جب فساد نقطہ ب تک پہنچے تو قوت کا کیا ہوا کام مستطیل ا ب ع گ کے رقبے کے مساوی ہوگا لیکن جسم میں فساد پیدا کرنے میں جو کام صرف ہوا وہ صرف مثلث ا ب ع کے رقبے کے مساوی ہے۔ اس لیے مثلث ا ع گ کے رقبہ کے مساوی کام ابھی مزید فساد پیدا کرنے کے لیے فاضل ہے۔ اس لیے فساد ابھی بڑھتا جائیگا یہاں تک کہ مثلث ع ف د کا رقبہ مثلث ا ع گ کے رقبے کے مساوی ہوجائے۔

ظاہر ہے کہ اس کے لیے اج = ۲ اب، یعنی فساد (اور اس طرح زود) بند، بج لداؤ کے مقابلے میں دگنا ہوگا۔

اگر ایک قوت دفعتہً ۔ ق سے + ق ہو جائے تو مجموعی فساد اور زور وہی ہونگے جو ۲ ق کے فوری بوجھ سے ہوتے اور اس صورت میں بھی جب فساد نقطہ ب تک پہنچیگا، شکل علا (۲) تو مثلث اع گ کے پہنچنے کے مساوی کام فاضل ہوگا جو مزید فساد پیدا کریگا۔ اس طرح فساد نقطہ ج تک جاری رہیگا۔ اس طرح اعظم تنشی فساد ہ ل ہوگا۔ اگر لداؤ تدریجی ہوتا تو فساد ہ ک ہوتا اور چونکہ ہ ل = ۳ ہ ک، اس لیے معلوم ہوا کہ اگر کسی بوجھ کو دفعتہً معکوس کر دیا جائے تو فساد اور زور اس کے تین گنے ہونگے جو اس تعاکس کے بتدریج ہونے سے ہوتے۔

ان میں سے ہر صورت میں مزید فساد اور زور تغیر کی مقدار کے مساوی ہوتا ہے۔ اس طرح کے مزید زور کو "حرکیاتی اضافہ" کہا گیا ہے اور اس طرح کہا جا سکتا ہے کہ اگر ایک فوری یا حرکیاتی زور نح میں تغیر ت ہو تو اس کا معادل تدریجی زور نح + ت ہوگا۔

زور کی تکرار اور فوری لداؤ کے درمیان ربط

زور کے تغیر کے تجربات کے نتائج اور فوری لداؤ کے متعلق اوپر کے استدلال کے درمیان جو مشابہت ہے اس کی وجہ سے بہت سے لوگوں کا خیال ہے کہ وولر کے تجربات دراصل فوری لداؤ کے تجربات تھے۔ ایک دوسرا خیال یہ ہے کہ یہ دونوں مسئلے دراصل علحدہ ہیں اس لیے تعمیروں کی تجویز میں ہر ایک کی علحدہ رعایت رکھنی چاہیے۔

ان دونوں مسئلوں میں مطابقت پیدا کرنے کے لیے سب میں پہلی دقت جس کا سامنا کرنا ہے یہ ہے کہ لچک کی حد کے باہر فساد زور کے متناسب نہیں ہوتا اور اس طرح اس حد کے باہر دوگنا فساد دوگنا زور نہیں پیدا کریگا

دیکھو (شکل ۱۱ع)۔ لیکن اس کے برخلاف اس سلسلے میں ایک اور واقعہ قابلِ لحاظ ہے اور وہ یہ کہ اگر کسی شے میں لچک کی حد سے باہر تک زور لگایا گیا ہو تو بعد کی آزمائشوں میں پایا جاتا ہے کہ لچک کی حد بڑھ گئی۔ اس لیے اگر زور کی ہر تکرار کے ساتھ یہ عمل جاری رہے تو آخر کار لچک کی حد اتنی اونچی ہو جائیگی کہ حرکیاتی استدلال نقطۂ شکست تک صحیح رہیگا۔

اگرچہ کہ اس بحث میں بہت سے نکات تصفیہ طلب ہیں لیکن عملی وجوہ سے تعمیروں کی تجویز میں صرف ایک بات کی رعایت رکھی جاتی ہے دونوں باتوں کی نہیں۔ اس کی وجہ یہ ہے:۔ فرض کرو کہ نرم فولاد کے لیے مستقل اور تدریجی بوجھ کے لیے بے خطر عملی زور ۵ء۷ ٹن فی مربع انچ ہے۔ تب حرکیاتی نظریے سے متعاکس اور فوری بوجھ کے لیے بے خطر عملی زور اس کا $\frac{1}{3}$ یعنی ۲ء۵ ٹن فی مربع انچ ہوگا۔ اب اگر زور کی تکرار کے لیے علحدہ رعایت رکھی جائے تو عملی زور $\frac{1}{3}$ × ۲ء۵ = ۸ء ٹن فی مربع انچ رکھنا ہوگا۔

لیکن چونکہ یہاں صدامہ یا ضراب کا کوئی سوال نہیں اس لیے یہ عملی زور ضرورت سے زیادہ پست ہو گیا۔

ضرب کی وجہ سے فساد اور زور ـــــ فرض کرو کہ ایک وزن و ایک تعمیر پر بلندی ع سے گرتا ہے اور فرض کرو کہ ع کی سمت میں بگاڑ یا فساد لا ہوتا ہے (شکل ۱۲ع)۔ تب وزن کا کیا ہوا کام و (ع + لا) ہوگا۔ یہ کام تعمیر کے فساد میں جذب ہوگا۔ پہلے اس صورت پر غور کرو کہ یہ فساد لچک کی حد کے اندر ہے۔ اس صورت میں کام بازگشتگی × حجم کے مساوی ہوگا۔ ہم یہ دکھا چکے ہیں کہ تناؤ یا فشار میں بازگشتگی $\frac{ز^2}{۲ ے}$ ہوتی ہے اس لیے اس صورت میں

$$و (ع + لا) = \frac{حجم \times ز^2}{۲ ے} = \frac{ح ز^2}{۲ ے} ۔$$

اب اگر ع کے مقابلے میں لا چھوٹا ہو تو

$$و ع = \frac{ح ز^2}{۲ ے}$$

$$ز = \sqrt{\frac{۲ \, سے \, و \, ع}{ح}}$$

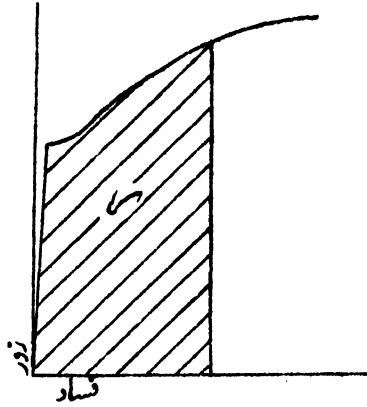
و

ع

زور

مہا

فساد

شکل ۱۲

شکل ۱۳

اگر وزن رفتار ی سے ٹکر دے تو

$$ع = \frac{ی^۲}{۲ ج}$$

یا

$$ز = \sqrt{\frac{۲ \, سے \, و \, ی^۲}{۲ ج \, ح}} = ی \sqrt{\frac{سے \, و}{ج \, ح}}$$

خماؤ کی بازگشتگی پر ہم شہتیروں کے خماؤ کی بحث میں غور کرینگے۔

فساد لچک کی حد سے زیادہ۔ اگر فساد لچک کی حد سے بڑھ جائے تو صفحہ ۳۵ پر کے استدلال سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فساد میں کام فی اکائی حجم "زور اور فساد" کے منحنی کے نیچے کے رقبے کے مساوی ہوگا۔ اگر یہ رقبہ مہا ہو (شکل ۱۳) تو $مہا = و ع$ یا $\frac{و \, ی^۲}{۲ ج}$
اس سے زور معلوم ہو سکتا ہے۔

عددی مثال — ½ انچ قطر کی ایک سلاخ ۱ ٹن کے ایک برقرار بوجھ کے تحت ⅛ انچ کھنچتی ہے۔ اگر اس سلاخ پر ۱۵۰ پونڈ کا ایک وزن ۳ انچ کی بلندی سے گرے تو کیا زور پیدا ہوگا۔ سلاخ ابتداء میں بے زور ہے۔ ے = ۳۰ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ لیا جائے۔

$$\tfrac{1}{2}''\ \text{قطر کی سلاخ کا رقبہ} = \text{۰٫۱۹۶}\ \text{مربع انچ}$$

$$\therefore\ \text{۱ ٹن بوجھ کے تحت زور} = \frac{\text{۱}}{\text{۰٫۱۹۶}}\ \text{ٹن فی مربع انچ}$$

$$= \frac{\text{۲۲۴۰}}{\text{۰٫۱۹۶}}\ \text{پونڈ فی مربع انچ}$$

$$\therefore\ \text{فساد} = \frac{\text{زور}}{\text{ے}} = \frac{\text{۲۲۴۰}}{\text{۰٫۱۹۶} \times \text{۳۰} \times \text{۱۰}^{\text{۶}}}$$

$$\text{اب}\ \tfrac{1}{8}'' = \text{فساد} \times \text{اصلی طول}$$

$$\therefore\ \text{اصلی طول} = \frac{\tfrac{1}{8}}{\text{فساد}} = \frac{\text{۰٫۱۹۶} \times \text{۳۰} \times \text{۱۰}^{\text{۶}}}{\text{۲۲۴۰} \times \text{۸}}$$

$$\therefore\ \text{حجم} = \text{طول} \times \text{تراشی رقبہ}$$

$$= \frac{\text{۰٫۱۹۶} \times \text{۳۰} \times \text{۱۰}^{\text{۶}} \times \text{۰٫۱۹۶}}{\text{۸} \times \text{۲۲۴۰}}$$

$$= \text{۶۴٫۳۳}\ \text{مکعب انچ}$$

$$\text{۱۵۰ پونڈ کا کام ۳ انچ گرنے میں} = \text{۳} \times \text{۱۵۰} = \text{۴۵۰}\ \text{انچ پونڈ}$$

$$\therefore\ \frac{\text{ز}^{\text{۲}} \times \text{۶۴٫۳۳}}{\text{۲ے}} = \text{۴۵۰}$$

$$\text{یا}\quad \text{ز} = \sqrt{\frac{\text{۹۰۰ ے}}{\text{۶۴٫۳۳}}}$$

$$= \frac{10 \times 30 \times 900^{9}}{64,432}$$

= ۲۰۴۸۰ پونڈ فی مربع انچ

[نوٹ - یہ سوال ہے کی قیمت کے بغیر حل ہو سکتا تھا کیونکہ ہے عمل کے دوران میں غائب ہو جاتا۔]

تپشی زور —— فرض کرو کہ طول ل کی ایک سلاخ کو ت° ف گرم کیا جاتا ہے اور پھیلاؤ کی شرح ع ہے۔ تو اگر پھیلاؤ کو روکا نہ جائے تو سلاخ کا طول ل (۱ + ع ت) ہو جائیگا یعنی طول کا اضافہ ع ت ل ہوگا۔

اگر سلاخ استوارانہ ثابت ہو جس کی وجہ سے یہ پھیلاؤ واقع نہ ہو سکے تو سلاخ میں ع ت ل کا فساد ہوگا اور اکائی کا فساد $\frac{ع ت ل}{ل}$ = ع ت ہوگا۔

اِس فساد سے فشاری زور ع ت × ے پیدا ہوگا جہاں ے ینگ کا مقیاس ہے۔

نرم فولاد کے لیے ع = ۰٫۰۰۰۰۰۶۵۷ فی درجہ فارن ہیٹ اور ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ

∴ زور فی درجہ فارن ہیٹ = ۰٫۰۰۰۰۰۶۵۷ × ۱۳۰۰۰

= ۰٫۰۸۵۴ ٹن فی مربع انچ

تپش کا ۱۲۰° ف کا تغیر لیا جائے تو اس کی وجہ سے زور = ۱۲۰ × ۰٫۰۸۵۴ = ۱۰٫۲۵ ٹن فی مربع انچ - یہ نرم فولاد کے بے خطر زور سے زیادہ ہے۔ اِس سے ظاہر ہے کہ تعمیروں کو تجویز کرتے وقت پھیلاؤ کی گنجائش رکھنا کتنا ضروری ہے۔

غیر متجانس سلاخیں راست زور کے تحت —— اگر ایک سلاخ

دو مختلف اشیاء (مثلاً فولاد اور کنکریٹ یا فولاد اور تانبے) پر مشتمل ہو جو ایک دوسری سے مضبوط جوڑی گئی ہوں اور اس مرکب سلاخ پر کوئی کھینچ یا ڈھکیل عمل کرے تو دونوں اشیاء میں فساد مساوی پیدا ہوگا اور چونکہ دونوں اشیاء کے لیے ینگ کے مقیاس مختلف ہونگے اس لیے دونوں اشیاء میں زور مختلف ہونگے۔

فرض کرو کہ ایک شے کا تراشی رقبہ ب اور ینگ کا مقیاس ے ہے اور اس میں زور ز پیدا ہوتا ہے اور دوسری شے میں ان کی متناظر مقداریں ب_1، ے_1، ز_1 ہیں۔

تب اگر ایک کھینچ یا ڈھکیل ق کے تحت اکائی کا فساد لا ہو تو

$$\text{لا} = \frac{\text{ز}}{\text{ے}} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{لا} = \frac{\text{ز}_1}{\text{ے}_1} \quad \ldots\ldots (2)$$

اور

$$\text{ق} = \text{ب}\,\text{ز} + \text{ب}_1\,\text{ز}_1 \quad \ldots\ldots (3)$$

جہاں $\text{ب}\,\text{ز}$ اور $\text{ب}_1\,\text{ز}_1$ دونوں اشیا پر کے بوجھ ہیں۔

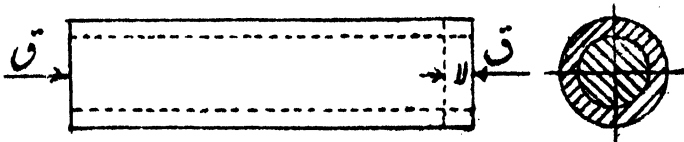
(۱) اور (۲) سے $\text{ز}_1 = \text{ے}_1\,\text{لا} = \frac{\text{ے}_1\,\text{ز}}{\text{ے}}$

$$\therefore \quad \text{ق} = \text{ز}\left(\text{ب} + \frac{\text{ے}_1\,\text{ب}_1}{\text{ے}}\right) \quad \ldots\ldots (4)$$

یا

$$\text{ز} = \frac{\text{ق}}{\text{ب}\left(1 + \frac{\text{ے}_1\,\text{ب}_1}{\text{ے}\,\text{ب}}\right)} \quad \ldots\ldots (5)$$

ق لا ق

شکل ۱۴

اب اگر ایک سلاخ بالکل پہلی شے کی لی جائے جس کا رقبہ ب۲ ایسا ہو کہ بوجھ ق کے تحت اس میں یہی زور ز پیدا ہو تو

$$\text{ز} = \frac{\text{ق}}{\text{ب}_{۲}}$$

یا

$$\text{ب}_{۲} = \text{ب}\left(۱ + \frac{\text{سے}_{۱}\,\text{ب}_{۱}}{\text{سے}\,\text{ب}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

اس مقدار ب۲ کو "متجانس شے کا معادل رقبہ" کہہ سکتے ہیں اور اس مسئلے کو حال میں محکم کنکریٹ کے استعمال کی وجہ سے بہت زیادہ اہمیت حاصل ہوگئی ہے۔ اس اطلاق سے ہم باب ۱۵ میں مزید بحث کرینگے۔ عام مسئلے پر واپس آؤ تو

$$\text{ز}_{۱} = \frac{\text{ق}}{\text{ب}_{۱}\left(۱ + \frac{\text{سے}\,\text{ب}}{\text{سے}_{۱}\,\text{ب}_{۱}}\right)} \quad \ldots\ldots (۷)$$

پہلی شے پر پڑنے والا بوجھ =

$$\text{ز} \times \text{ب} = \frac{\text{ق}}{۱ + \frac{\text{سے}_{۱}\,\text{ب}_{۱}}{\text{سے}\,\text{ب}}} \quad \ldots\ldots (۸)$$

اور دوسری شے پر بوجھ =

$$\text{ز}_{۱} \times \text{ب}_{۱} = \frac{\text{ق}}{۱ + \frac{\text{سے}\,\text{ب}}{\text{سے}_{۱}\,\text{ب}_{۱}}} \quad \ldots\ldots (۹)$$

چونکہ یہ مساوی نہیں اس لیے دونوں اشیا میں اضافی حرکت کا میلان ہوگا جس کی مزاحمت چپک کی قوت کریگی۔
یہ $\text{ز}\times\text{ب} - \text{ز}_{۱}\times\text{ب}_{۱}$ کے مساوی ہوگی یعنی

$$= \frac{\text{ق}}{\dfrac{\text{ب}_{\text{ے}} + \text{ب}_{1\text{ے}}}{\text{ب}_{\text{ے}}}} - \frac{\text{ق}}{\dfrac{\text{ب}_{\text{ے}} + \text{ب}_{1\text{ے}}}{\text{ب}_{1\text{ے}}}}$$

$$= \frac{\text{ق} \times \text{ب}_{\text{ے}}}{\text{ب}_{\text{ے}} + \text{ب}_{1\text{ے}}} - \frac{\text{ق} \times \text{ب}_{1\text{ے}}}{\text{ب}_{\text{ے}} + \text{ب}_{1\text{ے}}}$$

$$= \frac{\text{ق}\,(\text{ب}_{\text{ے}} - \text{ب}_{1\text{ے}})}{\text{ب}_{\text{ے}} + \text{ب}_{1\text{ے}}}$$

$$= \frac{\text{ق}\left(1 - \dfrac{\text{ب}_{1\text{ے}}}{\text{ب}_{\text{ے}}}\right)}{1 + \dfrac{\text{ب}_{1\text{ے}}}{\text{ب}_{\text{ے}}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

اس کے متعلق مثال کے لیے محکم کنکریٹ کا باب دیکھو۔

یہاں ایک جدول منسلک ہے جس میں متعدد اشیائے تعمیر کے لچک کے خواص درج ہیں۔ اس جدول کو استعمال کرتے وقت یہ خیال رہے کہ بہت سی اشیاء کے خواص اُن کی ترکیب پر منحصر ہوتے ہیں اور ترکیب کے بدلنے سے بڑی حد تک بدل جاتے ہیں۔ اس لیے اِس جدول میں دیے ہوئے اعداد کو اسی صورت میں استعمال کیا جائے جب کہ کسی زیرِ بحث شئے کی بطور خود آزمائش کر لینا ممکن نہ ہو۔

اشیاء کے لچک کے خواص

(نوٹ۔ اشیاء کے زور وغیرہ ٹن فی مربع انچ میں اور ے کے پونڈ فی مربع انچ میں ہیں)

شے	وزن فی مکعب فٹ (پونڈ)	شکستی زور			لچک کا مقیاس		لچک کی حد
		تناؤ	کچلاؤ	جز	ے	س	
نرم فولاد	۴۹۰	۲۸ تا ۳۳	—	۲۰ تا ۲۵	۱۳۴۰۰	۵۲۰۰	۱۵ تا ۲۰
پٹواں لوہا	۴۸۰	۲۰ تا ۲۵	۱۶ تا ۲۲	۱۶ تا ۱۹	۱۲۵۰۰	۵۰۰۰	۱۰ تا ۱۶
ڈھلا لوہا	۴۴۰ تا ۴۷۰	۵ تا ۱۵	۲۵ تا ۶۵	۶ تا ۱۳	۵۰۰۰ تا ۸۰۰۰	۲۵۰۰ تا ۴۰۰۰	—
تانبا	۵۴۰	۱۲ تا ۱۵	۲۰ تا ۲۵	۱۱ تا ۱۲	۷۰۰۰	—	۳ تا ۸
توپ دھات	″	۔	۲۵ تا ۴۰	۹ تا ۱۲	۵۰۰۰	—	۵ تا ۷
پیتل	۵۲۰ تا ۵۳۰	۱۰ تا ۱۲	—	—	۶۰۰۰	—	—
چوبینہ	۳۰ تا ۶۰	۱ تا ۷	۱ تا ۶	$\frac{1}{4}$ تا ۲	۳۰۰ تا ۱۲۰۰	—	—
پورٹلینڈ سیمنٹ	۹۰	۵۵۰ تا ۷۰۰	۵۰۰۰ تا ۸۰۰۰	—	—	—	—
بجری کنکریٹ (۱:۲:۴)	۱۵۰	—	۲۴۰۰ تا ۹۰۰۰	۳۰۰	2×10^6 تا 5×10^6	—	—
″ ″ (۱:۳:۶)	۱۴۰	—	۱۸۰۰ تا ۳۰۰۰	۲۰۰		—	—
جلے کوئلے کا کنکریٹ	—	—	۵۰۰	—	—	—	—
اینٹ (لندن اسٹاک)	۱۱۵	—	۱۲۰۰ تا ۱۸۰۰	—	—	—	—
″ (اسٹافورڈ شائر نیلی)	۱۴۰	—	۷۵۰۰	—	—	—	—
سیمنٹی خشت کاری	۱۰۰ تا ۱۵۰	—	۵۰۰ تا ۱۵۰۰	—	—	—	—
پورٹ لینڈ پتھر	۱۴۵	—	۴۰۰۰ تا ۸۰۰۰	—	—	—	—
ریتیلا پتھر	۱۳۵ تا ۱۴۵	—	۵۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰	—	—	—	—
گرینائیٹ	۱۷۰	—	۱۵۰۰۰ تا ۲۵۰۰۰	—	—	—	—

باب ۲

تجویز کے اصول۔ کامی زور وغیرہ۔ ہوا کا دباؤ

تجویز کا علمی پہلو ——— ایک امریکن نے اپنی قوم کے نقطۂ نظر کے مطابق انجینیر کی کیا اچھی تعریف کی ہے کہ "انجینیر وہ شخص ہے جو ایک ڈالر کے خرچ سے وہ کام کرے جو کوئی بھی نادان دو ڈالر میں کر سکے"۔ اگرچہ فن انجینیری کی یہ تعریف بہت مادی ہے اور جمالیاتی نقطۂ نظر سے بہت پست معلوم ہوتی ہے لیکن یہ یاد رہے کہ سب میں زیادہ سائنٹفک تعمیر وہی ہے جو کم ترین لاگت کی شرط کو پورا کرے اب لوگوں کو عادت ہوگئی ہے کہ قدیم زمانے کی حیرت انگیز تعمیروں کو دیکھ کر کہتے ہیں کہ ایسی تعمیریں اس زمانے میں نہیں بنائی جا سکتیں۔ یہ صحیح ہے لیکن اس کی وجہ یہ نہیں کہ ہم میں وہ ہنرمندی باقی نہیں رہی بلکہ ہم اب اتنا صرفہ برداشت نہیں کر سکتے۔

دراصل فن تجویز کے نظریے اور عمل میں باہم کوئی لاگ نہیں۔ دونوں ضروری چیزیں ہیں اور دونوں ایک دوسرے کے محتاج ہیں۔ نظریۂ تعمیر میں یہ بتایا جائیگا کہ کفایت کے نقطۂ نظر سے بہترین تجویز کون سی ہے۔ بہترین طور پر تجویز کی ہوئی تعمیر وہ ہے جو تمام مقامات پر یعنی تراشوں پر ایک ہی وقت میں جواب دے، یا بالفاظ دیگر جس کے مختلف حصے اس طرح تجویز کیے گئے ہوں کہ ان میں زور مساوی ہوں۔ نظریے کا کام بس اتنا ہے۔ اس کے برخلاف عملی تجویز میں یہ دیکھا جاتا ہے کہ آیا نظری تجویز تمام باتوں کا لحاظ کرتے انجام کار درحقیقت ارزاں ترین ہوگی

یا نہیں۔ اس کے لیے کاریگری اور تعمیر کو کھڑا کرنے اور اس کی نگہداشت کی لاگت کے مسئلے پر غور کرنا ہوگا اور ان مسائل کو نظریے کے ساتھ ملا کر غور کرنے سے ہی حقیقی سائنٹفک تجویز حاصل ہوتی ہے۔

تجویز کے نظری پہلو سے بحث کرتے وقت اس بات کو بھول نہیں جانا چاہیے کہ اگر نظریے کی پابندی کرنا ضروری ہے تو بہترین نظریہ استعمال کرنا چاہیے۔ خالص علمی آدمیوں کی نظر میں نظریے کی وقعت نہ ہونے کی وجہ یہ ہے کہ ان کا نظری علم کافی گہرا نہیں ہوتا۔ ان کو ان شرائط کا پورا علم نہیں ہوتا جن کا پورا ہونا کسی نظریے کے قابل اطلاق ہونے کے پیشتر ضروری ہے اور اس طرح وہ کوئی ایسا ضابطہ استعمال کر لیتے ہیں جو غالباً زیر تجویز صورت کے لیے بنایا ہی نہیں گیا۔

ایک اور بات یاد رکھنا چاہیے اور وہ یہ ہے کہ تجویز میں جو عملی قاعدے مستعمل ہیں اُن کو محض اس وجہ سے درست نہیں سمجھا جا سکتا کہ جو تعمیریں اُن کی رُو سے بنائی جاتی ہیں وہ اپنا کام بخوبی انجام دیتی ہیں۔ ممکن ہے کہ یہ تعمیریں ضرورت سے زیادہ وزنی اور جسیم اور گراں ہوں۔ نظری تحقیقات میں ہمارا مقصد یہ ہونا چاہیے کہ تجویز سے غیر معین اور مشکوک نکات کو جہاں تک ہو سکے دُور کریں اور صرف اس بات پر قانع نہ ہوں کہ ایسی تعمیر تیار کریں جو کھڑی رہے۔

تجویز کا تجارتی پہلو ——— اگر لفظ "سائنٹفک" اپنے صحیح معنوں میں استعمال کیا گیا ہو تو تجارتی پہلو سائنٹفک پہلو سے زیادہ مختلف نہیں ہوتا۔ تاہم بعض باتیں ایسی ہیں جو خالص تجارتی پہلو کے اندر آتی ہیں۔ اولاً یہ سوال ہے کہ تعمیر کے مختلف ارکان کی تراشیں کیا اختیار کی گئی ہیں۔ اس کا خیال رکھنا چاہیے کہ جہاں تک ہو سکے ایک ہی تراش اختیار کی جائے اور یہ تراش آسانی سے دستیاب ہو سکنی چاہیے۔ کسی خاص تعمیر کی لاگت محض اس وجہ سے بہت بڑھ جا سکتی ہے کہ ایک ایسی تراش کی تخصیص کی گئی جس کو

خاص طور پر بیلنا پڑے۔ (اگرچہ کارخانوں کی شایع کردہ فہرستوں میں تراشیں درج رہتی ہیں لیکن یہ ہمیشہ آسانی سے دستیاب نہیں ہوسکتیں)۔ ریوٹ کاری میں بعض اوقات لاگت اس وجہ سے بہت بڑھ جاتی ہے کہ ریوٹوں کی گھائی غیر ضروری طور پر بے قاعدہ رکھی گئی اور اکثر اوقات ایسے نمایشی کلیٹ دار جوڑ تجویز کئے جاتے ہیں جن کو سادہ جوڑوں پر کوئی برتری نہیں ہوتی۔ آیندہ ابواب میں جب ہم علٰحدہ تجویزوں سے بحث کرینگے تو ان باتوں پر زیادہ تفصیل سے غور کیا جائیگا

مجوِز کو تجویز میں منحنی خطوط سے جہاں تک ہوسکے احتراز کرنا چاہیے۔ تختیوں کو منحنی کی شکل میں کاٹنے میں بہت صرفہ ہوتا ہے اور عموماً ان سے کوئی فائدہ نہیں ہوتا۔ بعض لوگ یہ کہینگے کہ گولائی دار شکلیں دیکھنے میں زیادہ بھلی معلوم ہوتی ہیں اور بعض لوگ تو تختی دار گرڈروں کی تختیوں پر ڈھلے لوہے کی زیبایشی پٹیاں تک لگاتے ہیں۔ لیکن حقیقت یہ ہے کہ فولاد کی کوئی تعمیر حسن کاری کے نقطۂ نظر سے خوبصورت نہیں ہوتی اور گولائی دار کلی تختیوں اور زیبایشی پٹیوں کے ذریعہ اس کو سجانے کی کوشش اس کو اور زیادہ بدنما بنانا ہے کیونکہ اس سے صرفے کا صرفہ بڑھ جائیگا اور تعمیر پھر بھی حُسن کار کی نظر میں جیسی کی ویسی بدصورت رہیگی۔ منحنی ارکان پر ایک نظری اعتراض بھی ہے اور وہ یہ کہ ایسی سلاخوں پر بوجھ خارج المرکز ہوتا ہے جس سے زور بہت بڑھ جاتے ہیں۔

اگر عملاً نظریے کے کسی قدر خلاف کرنا پڑے تو حسابات میں اس کا ضرور خیال رہے۔ مثلاً نظری طور پر T تراش میں ریوٹوں کا مرکزی خط تراش کے مرکزِ ہندسی میں سے خط پر منطبق ہونا چاہیے۔ عملاً یہ ناممکن ہے کیونکہ اس صورت میں ریوٹ (Rivet) کے سر کو بند نہیں کیا جاسکتا۔ اس لیے جن تعمیروں میں ایسی تراشوں کو بطور بندھن یا داب روک کے استعمال کیا جائے ان کی تجویز کرتے وقت یہ یاد رکھنا چاہیے کہ بوجھ خارج المرکز ہے اور اس کی رعایت ملحوظ رکھنی چاہیے۔

کامی زور اور قدرِ سلامتی

—— عملاً کامی زور کیا اختیار

rosette

کیے جائیں یہ مسئلہ بے حد اہم ہے اور اگر تجویز کو فی الحقیقت مفید بنانا ہو تو
کامی زوروں کا صحیح علم اور اندازہ ہونا چاہیے۔

کامی زوروں سے بحث کرتے وقت **قدرِ سلامتی** کا اکثر نام لیا جاتا
ہے۔ اس کی تعریف یہ کی جاسکتی ہے کہ یہ وہ جزوِ ضربی ہے جس سے کامی زور
کو ضرب دینے سے ناکارگی کا زور حاصل ہو۔ یہ فقرہ اکثر بغیر سمجھے بوجھے استعمال
کیا جاتا ہے۔ اکثر صورتوں میں اس کو "لاعلمی کی رعایت" کہنا بہتر ہوگا۔ کیونکہ
اگر ایک تعمیر کسی قدرِ سلامتی مثلاً ۴ کے ساتھ تجویز کی جائے تو بالعموم اس سے
مراد یہ نہیں ہوتی کہ مجوزہ بوجھ کا ۴ گنا بوجھ بغیر ناکارگی کے برداشت ہوسکیگا
کیونکہ بعض امور ایسے ہوتے ہیں جن کی رعایت تجویز میں نہیں رکھی جاتی۔
لیکن ہمارا مقصد یہ ہونا چاہیے کہ حسابات اس طرح پر کیے جائیں کہ قدرِ سلامتی
حقیقی معنوں میں قدرِ سلامتی ہو۔ اور یہ اسی طرح ہوسکتا ہے کہ کامی زور ہوشیاری
کے ساتھ انتخاب کیے جائیں اور تجویز کے اندر ممکنہ باتوں کا خیال رکھا جائے۔ فولاد
کی تعمیروں میں دستور یہ ہے کہ تناؤ کا کامی زور تناؤ کے شکستی زور کا ایک
چوتھائی لیا جاتا ہے اور کہا جاتا ہے کہ قدرِ سلامتی ۴ ہے۔ لیکن بہت سے
تجویز کرنے والے زندہ یا متغیر بوجھ کی رعایت رکھنا بھول جاتے ہیں۔ نیز
قدرِ سلامتی کو شکستی زور کے حوالے سے اختیار کرنے پر بھی ایک اعتراض
وارد ہوتا ہے اور وہ یہ ہے کہ کسی تعمیر کی سلامتی کو قرار دینے والی چیز دراصل
مسالے کی لچک کی حد ہے۔ اگر زور، لچک کی حد سے زیادہ ہوں تو
ناکارگی کا واقع ہونا تقریباً یقینی ہے خاص کر فشاری ارکان یا داب روکوں
میں۔ پروفیسر آرنلڈ نے اس نکتے کی طرف مزید توجہ مبذول کرائی ہے۔
اس لیے بہتر ہوگا کہ کامی زور کو لچک کی حد کے حوالہ سے اختیار کیا جائے اور
فولاد میں لچک کی حد کی ایک اقل قیمت کی تخصیص کی جائے۔ بعض لوگ اس پر جو یہ
اعتراض کرتے ہیں کہ لچک کی حد شکستی زور سے ایک بہت زیادہ متغیر مقدار
ہے تو یہ واقعہ دراصل اس طریقِ عمل کی موافقت میں ہے نہ کہ مخالفت میں۔
یہ یقینی ہے کہ لچک کی حد کے باہر کے زور کسی تعمیر کے لیے بھی بہت نقصان رساں

ہوتی ہیں اور اگر یہ حد متغیر ہے تو ہم کو لازم ہے کہ کسی شئے کو استعمال کرنے سے پہلے اس کی یہ حد معلوم کر لیں اور کامی زور اس کے مطابق اختیار کریں۔ ہمارا خیال ہے کہ مردہ بوجھ یا اسکونی کامی زور لچک کی حقیقی حد کے نصف سے کبھی زیادہ نہیں ہونا چاہیے

تجویز میں مردہ بوجھوں کے لیے کامی زور اختیار کرنے کے لیے ذیل کی جدول استعمال کی جاسکتی ہے:—

شئے	کامی زور			زور کی اکائی
	تناؤ	فشار	جز	
نرم فولاد	۷	۸ تا ۶	۵	ٹن فی مربع انچ
پٹواں لوہا	۵	۴	۴	״
ڈھلا لوہا	½	۷	½	״
شاہ بلوط	۱۶	۱۳	۵ (ریشوں کے علی القوائم)	ہنڈرڈ ویٹ فی مربع انچ
صنوبر زرد	۱۰	۸	۵ ״ ״	״
سیمنٹ کنکریٹ ۴:۲:۱	—	۶۰۰ (خماؤ) ۵۰۰ (راست)	۶۰	پونڈ فی مربع انچ
گرینائیٹ	—	۴۰	—	ٹن فی مربع انچ
ریتلا پتھر / یارک پتھر	—	۲۵	—	״
چونا پتھر	—	۱۵	—	״
خشت کاری سیمنٹی گچ میں	—	۲۰	—	״
نیلی خشت کاری معمولی گچ میں	—	۸	—	״
خشت کاری چونا گچ میں	—	۵	—	״

"زندہ" یا متغیر بوجھوں کی رعایت ——— زندہ بوجھوں کی

رعایت کے دو طریقے ہیں جن کی غایت ایک ہی ہے :۔

(ا) معادل مُردہ بوجھ والا طریقہ ــــ اِس طریقے میں سکونی زور استعمال کیے جاتے ہیں اور بوجھوں کو ایک طریقے سے بڑھا کر معادل مردہ بوجھ حاصل کیا جاتا ہے۔ اِس معادل مردہ بوجھ کو حاصل کرنے کے طریقے حسبِ ذیل ہیں :۔

(۱) معادل مُردہ بوجھ = مردہ بوجھ + ۴ × زندہ بوجھ

اِس کو حرکیاتی ضابطہ کہا جاسکتا ہے۔

(۲) معادل مردہ بوجھ

$$و_م = \frac{ن غ + \sqrt{ن^۲ غ^۲ + ۴ (و - \frac{غ}{۲})^۲}}{۲}$$

جہاں غ بوجھ کا تغیر ہے اور و اعظم بوجھ ہے۔ ن ایک مستقل ہے جس کی قیمت فولاد کے لیے ۱٫۱۵ لی جاسکتی ہے۔ یہ ضابطہ اُس ضابطے سے اخذ کیا گیا ہے جو اِنوِن نے وولر کے تجربات کے لیے بنایا ہے۔

فولاد کے لیے معادل مردہ بوجھ حسبِ ذیل ہوگا :۔

$$و_م = \frac{۱٫۱۵ غ + \sqrt{۱٫۳۲۲۵ غ^۲ + ۴ (و - \frac{غ}{۲})^۲}}{۲}$$

اگر تغیر صفر سے اعظم قیمت تک ہو تو غ = و اور تب

$$و_م = ۱٫۲ و$$

(۳) معادل مردہ بوجھ = اعظم بوجھ + تغیر

(ب) متغیر کامی زور والا طریقہ ــــ اِس طریقے میں کامی زور کو زندہ اور مردہ بوجھوں کی اضافی قیمتوں کے لحاظ سے بدلا جاتا ہے۔ اس کے زیادہ مستعمل طریقے یہ ہیں :۔

(۱) لاؤن ہارڈٹ ویراش[1] کا طریقہ۔

$$\text{کامی زور} = \frac{\text{ز}}{۱٫۵}\left(۱ + \frac{\text{اقل بوجھ}}{۲ \times \text{اعظم بوجھ}}\right)$$

جہاں ز سکونی یا مردہ بوجھ کے تحت کا کامی زور ہے۔

(۲) حرکیاتی طریقہ۔

$$\text{کامی زور} = \frac{\text{ز}}{\frac{\text{زندہ بوجھ}}{\text{مجموعی بوجھ}} + ۱}$$

جہاں ز سے مراد اوپر کی طرح ہے۔

ایک آسان عددی مثال کے طور پر ایک چھت قینچی کے ایک رکن پر غور کرو جس میں مردہ بوجھ ۵ ٹن کا تناؤ ہے اور ایک طرف کی ہوا سے ۲ ٹن کا تناؤ اور دوسری طرف کی ہوا سے ۱ ٹن کا فشار پیدا ہوتا ہے۔ اوپر کے مختلف طریقوں سے حسبِ ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں:—

(ا) (۱) معادل مردہ بوجھ = ۵ + ۲ × ۲ = ۹ ٹن

(۲) " " $= \frac{۱٫۵ \times ۳ + \sqrt{۲٫۲۵ \times ۹ + ۴\left(۷ - \frac{۳}{۲}\right)^{۲}}}{۲}$

= ۸٫۲ ٹن

(۳) " " = ۷ + ۳ = ۱۰ ٹن

(ب) (۱) کامی زور $= \frac{\text{ز}}{۱٫۵}\left(۱ + \frac{۴}{۱۴}\right) = \frac{۶\text{ز}}{۷}$

(۲) " " $= \frac{\text{ز}}{\frac{۲}{۷} + ۱} = \frac{۷\text{ز}}{۹}$

اگر بندھن نرم فولاد کا ہو تو

(ب) (۱) سے کامی زور = ۶ ٹن فی مربع انچ

(۲) " " = ۴٫۵ " "

[1] Launhardt-Weyrauch

نرم فولاد کی صورت میں بندھن کی تراش کے رقبے میں مربع انچوں کی مطلوبہ تعداد حسب ذیل ہوگی :—

(الف) (۱) $\frac{۹}{۷}$ = ۱٫۲۸ مربع انچ
(۲) $\frac{۸٫۲}{۷}$ = ۱٫۱۷ "
(۳) $\frac{۱۰}{۷}$ = ۱٫۴۳ "
(ب) (۱) $\frac{۷}{۶}$ = ۱٫۱۷ "
(۲) $\frac{۷}{۵٫۴}$ = ۱٫۳۰ "

اگر زور کے تغیر کو بالکل نظر انداز کر دیا جائے تو مطلوبہ رقبہ

$\frac{۲+۵}{۷}$ = ۱ مربع انچ -

ہوا کا دباؤ

ہوا کے دباؤ کا مضمون اپنی نوعیت ہی میں نظریۂ تعمیر کا ایک تکلیف دہ حصّہ ہے۔ ۱۸۷۹ء میں ٹے (Tay) کے پل کے حادثے تک انجینیروں نے اس مضمون پر زیادہ توجہ نہیں کی تھی اور اگرچہ اُس کے بعد سے بہت سی مفید معلومات فراہم کی گئی ہیں لیکن اب بھی ہم کو ایسی تعمیروں پر ہوا کے عمل کا کوئی قطعی علم حاصل نہیں جو اور تعمیروں کے قریب واقع ہوں۔ ہوا کا دباؤ تجربے کے ذریعے تین بڑے طریقوں پر معلوم کیا گیا ہے :—

(۱) ہوا سے ریل کے جو ڈبے وقتاً فوقتاً اُلٹ گئے اُن کی صورت میں ہوا کا دباؤ محسوب کیا گیا جو ان کو اُلٹ دینے کے لیے ضروری تھا۔ اس طرح جو اعظم دباؤ حاصل ہوا وہ تقریباً ۳۰ پونڈ فی مربع فٹ ہے۔

(۲) ہوا کی رفتار باد پیما (anemometer) سے ناپی گئی اور اس سے دباؤ محسوب کیا گیا۔ اس کے لیے اسمیٹن[۱] نے ۱۷۵۹ء میں ایک ضابطہ

۱؎ Smeaton

شایع کیا د = ۰۰۵، ی^2 جہاں ی رفتار میل فی گھنٹہ میں ہے اور دباؤ پونڈ فی مربع فٹ
میں۔ آج کل سمجھا جاتا ہے کہ اس ضابطے سے دباؤ کی قیمت بہت زیادہ حاصل
ہوتی ہے اور نیشنل فزیکل لیبارٹری (یعنی انگلستان کے سرکاری معمل طبیعیات)
میں جو تجربات کیے گئے ہیں (انسٹی ٹیوٹ آف سول انجینیرز کی رُوداد
جلد ۱۵۶) اُن سے ضابطہ د = ۰۰۳، ی^2 اخذ کیا گیا ہے۔

(۳) ہوا کے زیر عمل تختیوں پر دباؤ محسوب کیا گیا۔ اس قسم کے بہت سے
کارآمد تجربات سر بی۔ بیکر[1] نے فورتھ[2] کے پُل کی تعمیر سے پہلے کیے، اور اس
کے بعد سے اب تک اعداد و شمار محفوظ رکھے گئے ہیں۔ ذیل کے اعداد سے جو
مسٹر ایڈم ھنٹر[3]۔ اے۔ ایم۔ آئی۔ سی۔ ای کے ایک قابل تعریف مقالے
سے لیے گئے ہیں (جونیر انسٹی ٹیوٹ آف انجینیرز کا رسالہ جلد ۷ نمبر ۲)
اِن میں سے چند تجربات سے حاصل شدہ اعظم قیمتیں معلوم ہوتی ہیں :-

سنہ	تاریخ		دباؤ پونڈ فی مربع فٹ میں					ہوا کی سمت
			گھومتا ہوا گیج ۱٫۵ مربع فٹ	چھوٹا ثابت گیج ۱٫۵ مربع فٹ	بڑا ثابت گیج ۳۰۰ مربع فٹ	بڑے ثابت گیج کے مرکز پر ۱٫۵ مربع فٹ	بڑے گیج کا دوائیں بالائی حصہ	
۱۸۸۴	۲۷	اکتوبر	۲۹	۲۳	۱۸	-	-	جنوب مغرب
"	۲۸	"	۲۶	۲۹	۱۹	-	-	"
۱۸۸۵	۲۰	مارچ	۳۰	۲۵	۱۷	-	-	مغرب
"	۴	دسمبر	۲۵	۲۷	۱۹	-	-	"
۱۸۸۶	۳۱	مارچ	۲۶	۳۱	۱۹	۲۸٫۵	۲۲٫۰	جنوب مغرب
۱۸۸۷	۳	فروری	۲۶	۴۱	۱۵	-	-	"
۱۸۸۸	۵	جنوری	۲۷	۱۶	۷	-	-	جنوب مشرق
"	۱۷	نومبر	۳۵	۴۱	۲۷	-	-	مغرب
۱۸۸۹	۲	"	۲۷	۳۴	۱۲	-	-	جنوب مغرب
۱۸۹۰	۱۹	جنوری	۲۷	۲۸	۱۶	-	-	"
"	۲۱	"	۲۶	۲۸	۱۵	-	-	مغرب
"	۲۵	"	۲۷	۲۳	۱۸	۲۳٫۵	۲۲	مغرب جنوب مغرب
	اوسط		۲۷٫۶	۲۹٫۸	۱۶٫۹	-	-	-

۱؎ Sir B. Baker ۲؎ Forth ۳؎ Mr. Adam Hunter

پُل کی تعمیر کے بعد سے اعداد و شمار چھوٹے گیجوں سے لیے گئے جن کا رقبہ ۱٫۵ مربع فٹ تھا اور جو بلند آب لیول سے مختلف بلندیوں پر رکھے گئے تھے۔ ذیل کے اعداد سے درج شدہ اعظم دباؤ معلوم ہوتے ہیں۔ ۲۱۴ فٹ کی بلندی کے لیے دو خانے ہیں جو پُل کے دونوں سروں کے لیے ہیں۔

سنہ	تاریخ	دباؤ (پونڈ فی مربع فٹ) مختلف بلندیوں پر				
		۵۰ فٹ	۱۶۳ فٹ	۱۴۱ فٹ	۲۱۴ فٹ	۳۷۸ فٹ
۱۹۰۱	۲۶ جنوری	—	۱۵	۲۵	—	۶۵
〃	۲۳ نومبر	—	۵۰	۵۵	۵۵	۶۰
۱۹۰۲	۱۳ دسمبر	—	۲۷٫۵	۳۱	۳۴	۱۸
۱۹۰۳	۱۰ جنوری	۱۵	۲۰	۲۵	۲۷٫۵	۶۰
〃	۳۱ 〃	—	۱۹٫۵	۲۹	۲۶	۶۵
〃	۱۸ مارچ	۲۰	۲۰	۲۵	۲۹	۳۱
〃	۲۱ 〃	۱۰	۲۰	۲۰	۲۲٫۵	۵۴
۱۹۰۴	۲۶ 〃	—	۲۰	۳۲	۲۷	۵۲
〃	۲۹ دسمبر	—	۲۲٫۵	۲۲٫۵	۳۲٫۵	—
۱۹۰۵	۲۱ جنوری	—	۲۱	۳۰	۲۳	—
〃	۱۸ مارچ	—	۳۲٫۵	۳۲٫۵	۴۲	۶۰
〃	۲۸ فروری	۱۰	۲۴	۲۰	۲۰	۳۸
۱۹۰۶	۲۶ جنوری	۱۵	—	—	—	۵۹
〃	۱۱ 〃	۱۰	۲۰	۲۳٫۵	۲۵	۳۰
〃	۸ فروری	۱۰	۱۵	۲۵	۲۵	۵۵
اوسط		۱۳٫۰	۲۳٫۰	۲۸٫۰	۳۰٫۰	۵۰٫۰

اِن تجربات سے جن میں تیج انتصاباً لگائے گئے تھے حسب ذیل نتائج اخذ کیے جاسکتے ہیں:۔

(۱) ہوا کا دباؤ بلندی کے ساتھ بڑھتا ہے۔ اِس کی توجیہ یوں کی جاسکتی ہے کہ زمین، ہوا کو پیچھے گھسیٹتی ہے یعنی رگڑ کا عمل کرتی ہے۔

(۲) چھوٹی سطحوں پر دباؤ بڑی سطحوں سے خاصا زیادہ ہوتا ہے کیونکہ ہوا مقامی جھونکوں کا عمل کرتی ہے۔ اوپر کے تجربوں میں گھومنا تیج ہمیشہ ہوا کے رُخ رکھا گیا اور ثابت تیج مشرق اور مغرب کے رُخ رکھے گئے۔ اِن اعداد سے یہ نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ کسی بڑے رقبہ پر اوسط دباؤ اُس دباؤ کا تقریباً دو تہائی ہوگا جو اِس نواح کے بادپیما (Anemometer) کے اندراجات سے حاصل ہو۔

(۳) کوئی چھوٹا رقبہ ایک بڑے رقبے سے گھرا ہوا ہو تو اس پر دباؤ ایک علیحدہ چھوٹے رقبے کے مقابلے میں کم ہوتا ہے لیکن یہ فرق بہت زیادہ نہیں ہوتا۔ اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ کناروں کا اثر کچھ زیادہ قابلِ لحاظ نہیں۔

چونکہ بڑے رقبوں پر دباؤ ۳۰ پونڈ فی مربع فٹ سے شاذونادر ہی زیادہ ہوتا ہے اس لیے مسٹر ہنٹر[له] نے مذکورۂ بالا پرچے میں خیال ظاہر کیا ہے کہ عملاً تجویز کو ۳۰ پونڈ فی مربع فٹ پر مبنی رکھنا کافی ہے۔

یہ خیال بہت معقول معلوم ہوتا ہے بشرطیکہ زوروں کے حساب میں ہوا کے دباؤ کو زندہ بوجھ سمجھا جائے۔

مختلف ماہرینِ فن اور مختلف ضوابط ۳۰، ۴۰، ۵۰ اور ۵۶ پونڈ فی مربع فٹ کے دباؤ اختیار کرتے ہیں اور جب یہ بڑی قیمتیں اختیار کی جائیں اس وقت ہوا کے دباؤ کو مردہ بوجھ سمجھا جاسکتا ہے۔

ہوا کے دباؤ کی سمت اور مائل سطحوں پر دباؤ —— ہوا کے دباؤ کو ہمیشہ اِس کی زیرِ عمل سطح پر عمود وار سمجھا جاتا ہے۔

له Mr. Hunter

اگر سطح انتصابی نہ ہو بلکہ انتصابی سمت سے کوئی زاویہ بنائے تو اس پر ہوا کا دباؤ انتصابی سطح پر کے دباؤ کی رقوم ہیں معلوم کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ سطح افقی سطح سے زاویہ طہ بناتی ہے اور انتصابی سطح پر دباؤ دص ہوتا ہے۔ تب ہٹن[1] کے تجربات پر جو ضابطہ مبنی ہے اس کی رو سے

$$د_{طہ} = دص \ جب \ طہ^{۱٫۸۴ \ جم \ طہ - ۱}$$

اور دوشیمن[2] کے ضابطے کی رو سے

$$د_{طہ} = دص \frac{۲ \ جب \ طہ}{۱ + جب^{۲} \ طہ}$$

پروفیسر کارل پیرسن[3] نے ایک بہت آسان قاعدہ تجویز کیا ہے جو یہ ہے کہ دص کو ۵۰ پونڈ فی مربع فٹ لیا جائے اور $د_{طہ}$ کی قیمت طہ = ۵۰° تک اتنے پونڈ فی مربع فٹ لی جائے جتنے کہ طہ میں درجوں کی تعداد ہے اور طہ = ۵۰° سے اوپر $د_{طہ}$ کی قیمت ۵۰ پونڈ فی مربع فٹ لی جائے۔

اس قاعدے کو عام جملے کی شکل میں یوں بیان کر سکتے ہیں کہ طہ = ۵۰° تک $د_{طہ} = \frac{دص \times طہ}{۵۰}$ اور اس کے آگے $د_{طہ} = دص$

اگرچہ اس بات کا لحاظ کرتے کہ ہوا کے دباؤ کے تجربات بہت نازک اور صحیح نہیں ہوتے ہٹن کا ضابطہ بہت پیچیدہ معلوم ہوتا ہے لیکن زیادہ تر اسی کو اختیار کیا گیا ہے اس لیے ہم اس کے ساتھ استعمال کرنے کے لیے ذیل کی جدول یہاں دیتے ہیں۔ اس جدول میں جو کسریں دی گئی ہیں اُن سے دص کو ضرب دینے سے $د_{طہ}$ حاصل ہوگا۔

۱؎ Hutton

۲؎ Duchemin

۳؎ Prof. Karl Pearson

ط	۵	۱۰	۲۰	فصل ÷ ۴	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰
—	۰٫۱۲۵	۰٫۲۴	۰٫۴۵	۰٫۵۹	۰٫۶۶	۰٫۸۳	۰٫۹۵	۱٫۰۰	۱٫۰۲	۱٫۰۱	۱٫۰۰

ستونوں اور دُودکشوں پر ہوا کا دباؤ ـــــ مربع تراش کے ستونوں اور دُودکشوں پر ہوا کے مجموعی دباؤ کو مرکزِ ہندسی پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے اور اس کی مقدار دم × ب لی جا سکتی ہے جہاں ب انتصابی تراش کا رقبہ ہے۔

مدور تراشوں کے لیے دباؤ = ۰٫۵ دم × ب
مسدس (شش پہلو) ״ ״ = ۰٫۶۵ دم × ب
مثمن (ہشت پہلو) ״ ״ = ۰٫۷۵ دم × ب

چھتوں پر ہوا کا دباؤ (اسٹینٹن کے تجربات)

چند کارآمد تجربات سے جو ڈاکٹر اسٹینٹن نے انگلستان کے قومی معملِ طبیعیات (نیشنل فزیکل لیبارٹری) میں چھتوں پر ہوا کے دباؤ کے متعلق کیے ہیں ثابت ہوتا ہے کہ بعض صورتوں میں چھت کی بادپشت جانب ایک چُوس دباؤ ہوتا ہے جس سے چھت کے مختلف ارکان کے زوروں میں قابلِ لحاظ فرق واقع ہوتا ہے۔ چھتوں کے حسابات میں بہت کم مجوزوں نے اس بات کا لحاظ رکھا ہے لیکن یہ مسئلہ خاصا اہم ہے اور یا تو ان تجربات کے نتائج کی تردید ہونا چاہیے یا تجویز میں ان کا خیال رکھا جانا چاہیے۔

ان تجربات میں چھت کے نمونے ایک فولادی شہ کڑی پر مشتمل تھے اور چھت کے زاویہ کو ۳۰° سے ۶۰° تک بدل سکنے کا انتظام رکھا گیا تھا شہ کڑی پر مہاگنی کے تختے ۸ فٹ × ۷ فٹ کے تھے۔

حسبِ ذیل نتائج حاصل ہوئے :۔

ـــہ چھت قینچیوں کے لیے یہی گھائی عام طور پر مستعمل ہے یعنی ارتفاع = فصل ÷ ۴

میلان	دباؤ فی مربع فٹ ی = ۲۰ میل فی گھنٹہ کے لیے	
	باد رخ	باد پشت
۹۰°	+ ۱٫۳۵	+ ٫۱۵
۴۵°	+ ۱٫۱۳	۰
۳۰°	+ ٫۶۱	− ٫۱۶

چھتوں پر ہوا کے دباؤ کے متعلق ذیل کے نتائج اخذ ہوئے جن سے تجویز کے قواعد بنانے چاہییں :—

ضابطہ

$$د = ک\ ی^{2}$$

جس میں

د = دباؤ پونڈ فی مربع فٹ میں

ی = رفتار میل فی گھنٹہ میں

استعمال کرنے کے لیے ک کی قیمتیں یہ ہونگی :—

(ا) ہوا ستونوں کے درمیان سے گزرتی ہوئی —

	ک کی قیمت		
	۹۰°	۴۵°	۳۰°
باد رخ	٫۰۰۳۴	٫۰۰۲۸	٫۰۰۱۵
باد پشت	صفر	صفر	صفر

(ب) عمارت کے اندر دباؤ ممکن ——

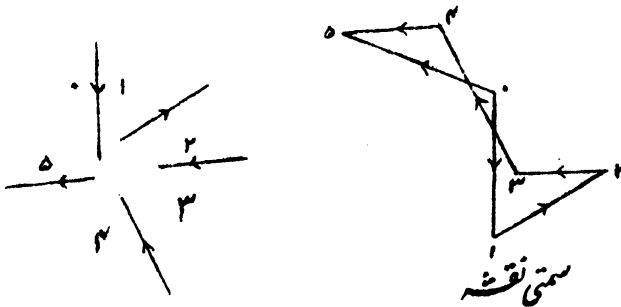
	ک کی قیمت		
	۶۰°	۴۵°	۳۰°
باد رُخ	+۰۰۳۴ء	+۰۰۲۸ء	+۰۰۱۵ء
باد پشت	-۰۰۳۲ء	-	-۰۰۲۲ء

ہوا کے دباؤ کے متعلق اوپر جو بیان لکھا گیا ہے اِس سے اِس کتاب کے پڑھنے والوں کو کافی معلومات ہو گئی ہونگی کہ تجویز میں ہوا کا دباؤ فی مربع فٹ کیا اختیار کیا جائے۔ ہوا کے دباؤ سے جو زور پیدا ہوتے ہیں اُن کو محسوب کرنے کا طریقہ ہم آگے چل کر بتائینگے خاص کر چھت قینچیوں کے ہوا کے زور زیادہ تفصیل کے ساتھ ڈھانچہ دار تعمیروں والے باب میں بیان کیے جائینگے۔

اسٹینٹن کے ہوا کے دباؤ کے تجربات کے لیے دیکھو ضمیمہ صفحہ ....

قوتیں، رقبے، اور معیار

قوتوں کے نظام کے حاصل کی ترسیمی بحث

قوتیں گردشہ مقداریں ہیں یعنی وہ مقدار، سمت، اور محل ہیں خطوطِ مستقیم سے تعبیر کی جاسکتی ہیں۔ اِس طرح "سمتی جمع کے قانون" سے جو یہ ہے کہ سمتی مقداروں کی (یعنی اُن کی جن کی مقدار اور سمت ہو لیکن محل نہ ہو) کسی تعداد کا حاصل جمع یا حاصل اس طرح حاصل ہو سکتا ہے کہ اُن کو یکے بعد دیگرے سرے سے سرا ملا کر رکھا جائے، سمت وہی رکھی جائے اور اُن کے تیروں کے سرے

شکل ۱۵ سمتی کثیر الاضلاع کی ساخت

مسلسل سمتوں میں ہوں۔ اخیر میں وہ خط جو پہلے سمتی کے شروع کے سرے سے آخری سمتی کے آخری سرے تک کھینچا جائے سمتی حاصل جمع کہلاتا ہے۔ اِس قانون سے قوتوں کی کسی تعداد کے حاصل کی مقدار اور سمت حاصل ہو سکتی ہے لیکن ضروری نہیں کہ محل حاصل ہو۔

سمتی مقداروں کی بحث میں "بو کی ترقیم" بہت کارآمد ہے وہ یہ ہے کہ سمتیوں کے درمیان کی جگہوں کو حروف یا اعداد سے تعبیر کیا جائے اور اِس طرح کوئی سمتی اُن دو جگہوں کے حروف یا اعداد سے تعبیر ہوگا جن کے درمیان یہ واقع ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ (۰، ۱)، (۱، ۲)، (۲، ۳)، (۳، ۴)، (۴، ۵) (شکل ۱۵) چند قوتیں ایک مستوی میں ہیں۔ کسی موزوں پیمانے پر، ایک سمتی نقشے میں ایک خط ۰، ۱ کھینچو جو قوت ۰، ۱ کو مقدار اور سمت میں تعبیر کرے۔ پھر اسے ۱، ۲ کھینچو جو قوت ۱، ۲ کو مقدار اور سمت میں تعبیر کرے اور اسی طرح یہاں تک کہ آخری قوت (۴، ۵) کھینچ لی جائے۔ تب سمتی نقشے کے پہلے نقطے کو آخری نقطے سے یعنی ۰ کو ۵ سے ملانے والا خط ۰، ۵ قوتوں کے حاصل کی مقدار اور سمت کو ظاہر کریگا۔ خط ۰، ۵ کو سمتی کثیر الاضلاع کا اختتامی خط کہا جاتا ہے۔ اب اگر دی ہوئی قوتیں تعادل میں ہوں تو ظاہر ہے کہ اُن کا حاصل کچھ نہیں ہوگا۔ اِس طرح متعادل قوتوں کے سمتی کثیر الاضلاع کا پہلا نقطہ اور آخری نقطہ ایک دوسرے پر منطبق ہونے چاہییں۔

چند دی ہوئی قوتوں کا جب حاصل معلوم کرنا ہو تو بالعموم حاصل کی مقدار اور سمت کے علاوہ اُس کا محل بھی مطلوب ہوتا ہے، اور سوائے اس صورت کے کہ تمام قوتیں ایک ہی نقطے میں سے گزریں جس صورت میں حاصل بھی اسی نقطے میں سے گزریگا بالعموم محل کے لیے کوئی اَور عمل اختیار کرنا پڑیگا۔ یہ عمل "رسیمائی اور سمتی کثیر الاضلاع" کے نام سے مشہور ہے اور حسب ذیل ہے:-

فرض کرو کہ (۰، ۱)، (۱، ۲) وغیرہ (شکل ۱۶) چند قوتیں ہیں جو ضروری نہیں کہ متوازی یا متراکز ہوں۔ کسی موزوں پیمانے پر ایک سمتی نقشے میں ۰، ۱، ۲ وغیرہ

کھینچو۔ تب حسب سابق اختتامی خط ۰، ۵ سے حاصل کی مقدار اور سمت تعبیر ہوگی۔

شکل ۱۶۔ رسیمانی اور سمتی کثیر الاضلاع کی ساخت

اب کاغذ پر کسی مناسب مقام پر ایک نقطہ ط لو (جو قطب کہلاتا ہے) اور ط سے ۰، ۱، ۲ وغیرہ کو ملاؤ۔ اب پہلی قوت کے خطِ عمل کو قطع کرتا ہوا کوئی خط ا ف متوازی ط۰ کے کھینچو اور فرض کرو کہ یہ پہلی قوت کے خطِ عمل کو ا پر قطع کرتا ہے۔ جگہ ۱ میں ا ب متوازی ط ۱ کے کھینچو، جگہ ۲ میں ب ج متوازی ط ۲ کے، اور علیٰ ہذا یہاں تک کہ آخری کڑی، ط ۵ کے متوازی کھینچ جائے۔ (نوٹ۔ خطوط ف ا، ا ب، ب ج..... وغیرہ کڑیاں کہلاتے ہیں)۔ اب اس آخری کڑی کو خارج کرکے پہلی کڑی سے ف پر ملنے دو۔ تب حاصل ح نقطۂ ف میں سے گزریگا شکل ا ب ج د ع ف کڑیوں کا کثیر الاضلاع یا رسیمانی کثیر الاضلاع کہا جاتا ہے۔

ثبوت — سمتی جمع کے قانون کی رُو سے سمتی نقشے میں قوت ۰، ۱ قوتوں ۰، ط اور ط، ۱ کے معادل ہے جو خطوط ف ا اور ا ب میں عمل کریں۔ قوت ۱، ۲ قوتوں ۱، ط اور ط، ۲ کے معادل ہے جو ب ا اور ب ج میں عمل کریں اور علیٰ ہذا۔ آخری قوت ۴، ۵ قوتوں ۴، ط اور ط، ۵ کے معادل ہے جو د ع اور ف ع میں عمل کریں۔ اب دیکھو ف ا اور ف ع میں عمل کرنے والی قوتوں کے سوا باقی سب ایک دوسری کی تعدیل کردیتی ہیں اور اس طرح قوتوں کے پورے نظام کا حاصل وہی ہے جو ف ا اور ف ع کا ہے اور اس طرح ان سے

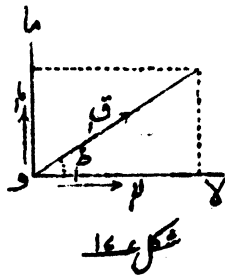
نقطۂ تقاطع ف میں سے عمل کریگا۔

یہ عمل کام نہیں دیگا اگر پہلی اور آخری کڑی متوازی ہوں۔ اگر یہ صورت ہو تو یا تو (ا) ط خط ۰، ۵ پر لیا گیا ہے یا (ب) سمتی کثیر الاضلاع بند ہو جاتا ہے (یعنی ۰ اور ۵ منطبق ہوتے ہیں) جس صورت میں قوتیں یا تو تعادل میں ہونگی یا ایک جفت میں تحویل ہونگی۔

آگے چل کر خماؤ کے معیار' ہوا کے دباؤ کے لیے زور نقشہ' وغیرہ' کے سلسلے میں ہم کو ریسمانی اور سمتی کثیر الاضلاع کا بار بار استعمال کرنا ہوگا۔ لیکن مناسب یہی ہے کہ طلبا اسی مقام پر تختہ نقشہ کشی پر چند مثالیں کر کے اس عمل پر خوب حاوی ہو جائیں۔

قوتوں کا حاصل علم مثلثی تحلیل سے — اگر کوئی قوت ق، کسی حوالے کے خط و لا سے زاویہ طہ، پر عمل کرے (شکل ۱۷) تو اس قوت کے اجزائے تحلیلی و لا کی سمت میں اور اس کے علی القوائم یہ ہونگے :-

شکل ۱۷

لا = ق، جم طہ،

ما = ق، جب طہ،

اب فرض کرو کہ متعدد قوتیں ق، ق۲ ..... قن ہیں جو زاویوں طہ، طہ۲ ... طہن پر عمل کرتی ہیں۔ تب سمت و لا میں مجموعی جزو تحلیلی

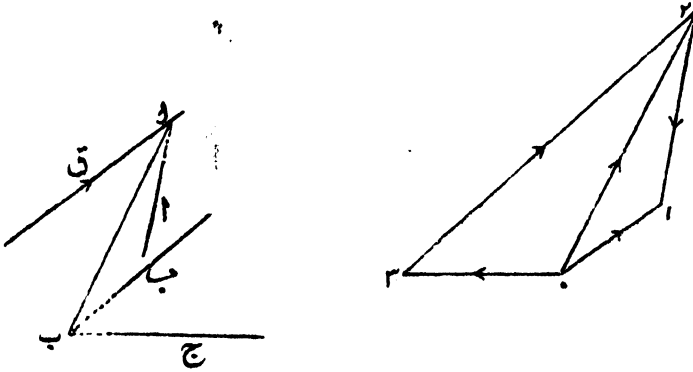
لا = ق، جم طہ، + ق۲ جم طہ۲ + ... قن جم طہن

اس کو آسانی کے لیے یوں لکھا جاتا ہے :-

لا = مجموعہ (ن تا ۱) (ق جم طہ) .... (۱)

اسی طرح مجموعی جزوِ تحلیلی د ما کی سمت میں

$$ما = ق_۱ \text{ جب } طہ_۱ + ق_۲ \text{ جب } طہ_۲ + \ldots\ldots ق_ن \text{ جب } طہ_ن$$

یا $$ما = \sum_{۱}^{ن} (ق \text{ جب } طہ) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

شکل ۱۷ و۔ ایک قوت کی تحلیل تین سمتوں میں

تب اگر حاصل کی مقدار ح ہو اور و لا سے اِس کا میلان عہ ہو تو

$$ح = \sqrt{لا^۲ + ما^۲}$$

$$\text{اور مس } عہ = \frac{ما}{لا}$$

اگر تمام قوتیں متراکز نہ ہوں تو اِس حاصل کے محل کے لیے حسب سابق کوئی اور عمل کرنا ہوگا۔ موجودہ صورت میں اِس کے لیے معیاروں کا اصول اختیار کیا جاتا ہے جس سے ہم آگے چل کر بحث کرینگے۔

ایک قوت کی تحلیل تین غیر متراکز سمتوں میں ــــــ ایک قوت ق کو تین سمتوں ا، ب، ج میں اِس طرح تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

تینوں میں سے ایک خط مثلاً ا کو خارج کرکے قوت کے خطِ عمل سے نقطہ ل پر ملنے دو (شکل ۱۷ ل) اور باقی دو سمتوں کو خارج کرکے باہم ب پر ملنے دو۔ ایک خط ۰، ۱ کھینچو جو قوت ق کو تعبیر کرے اور ۱، ۲ اور ۰، ۲ علی الترتیب سمت ا اور خط ل ب کے متوازی کھینچو۔ پھر ۰، ۳ کو باقی دو سمتوں میں سے کسی ایک مثلاً ج کے متوازی کھینچو اور ۲، ۳ کو باقی سمت ب کے متوازی۔ تب (۱، ۲) (۲، ۳) اور (۳، ۰) اِن تین سمتوں میں مطلوبہ اجزائے تحلیلی ہونگے۔

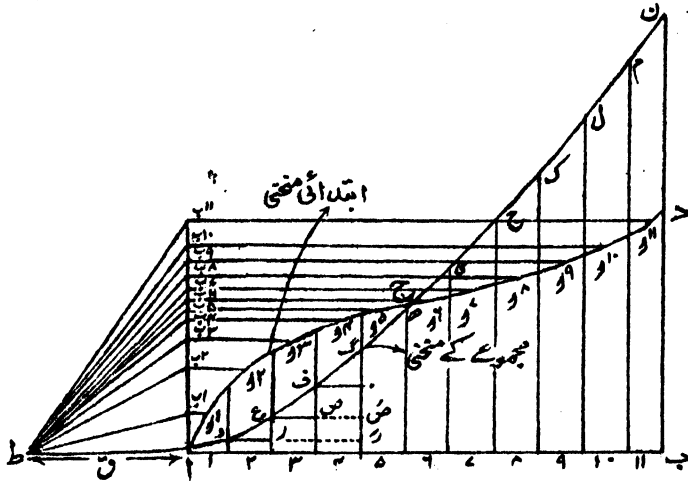
رقبوں کی پیمایش —— (ا) ریاضیاتی طریقہ —— اگر ف (لا) ایک تفاعل لا کا ہو اور اِس تفاعل کی ترسیم کھینچی جائے تو ترسیم اور محور لا کے درمیان رقبہ یہ ہوگا:—

ب = ∫ ف (لا) فرلا

عملاً اگر منحنی کی مساوات سادہ شکل میں نہ حاصل ہو سکے یا تکمل نہ کیا جا سکے تو یہ طریقہ ناقابلِ عمل ہوگا۔ اور چونکہ عملاً ایسا اکثر ہوگا اِس لیے سطح پیما سے یا ذیل کے طریقے سے کام لینا ہوگا:—

(ب) ترسیمی طریقہ —— اگر ایک منحنی ایک اُفقی قاعدے پر کھینچا جائے اور ایک دوسرا منحنی ایسا کھینچا جائے جس کا معیّن کسی نقطے پر اُس نقطے تک پہلے منحنی کے رقبے کو تعبیر کرے تو دوسرا منحنی پہلے منحنی کا **حاصل جمع منحنی** یا **تکملی منحنی** کہلاتا ہے اور پہلے منحنی کو ابتدائی منحنی کہتے ہیں۔

حاصل جمع منحنی ترسیماً اِس طرح حاصل ہو سکتا ہے: فرض کرو کہ ا ج د (شکل ۱۸ ا) کوئی ابتدائی منحنی ایک مستقیم قاعدے ا ب پر ہے۔ ا ب کو چند حصوں میں تقسیم کرو جو ضروری نہیں کہ مساوی ہوں (لیکن عمل کی آسانی کے لیے اِن کو عموماً مساوی لیا جاتا ہے)۔ قاعدے کے اِن حصّوں کو اتنا چھوٹا ہونا چاہیے کہ ان کے اوپر منحنی کا جو دور ہے اِس کو

ایک خطِ مستقیم سمجھا جا سکے۔ تقریباً ۱ سمر یا ۴ رانچ عموماً موزوں ہوگا اور اکثر صورتوں

شکل ۱۸۔ مجموعے کے منحنی کی ساخت

میں آخر میں اِن سے چھوٹا ایک حصّہ (حصہ ۱۱) بچیگا۔ اِن حصّوں کے وسطی نقاط ۱، ۲، ۳، وغیرہ، معلوم کرو اور فرض کرو کہ ان میں کے انتصابی خط منحنی کو ۱و، ۲و، ۳و، وغیرہ پر ملتے ہیں۔ اب اِن نقاط کا ایک انتصابی خط ۱ ع پر ظل لو جس سے نقاط ۱ ب، ۲ ب، ۳ ب، وغیرہ، حاصل ہونگے۔ اِن نقاط کو ۱ ب محروجہ پر کے ایک قطب ط سے ملاؤ جو ۱ سے ایک مناسب فاصلہ ق پر ہو۔ اب حصہ ۱ میں ۱ د متوازی ط ۱ ب کے کھینچو، حصہ ۲ میں د ع متوازی ط ۲ ب کے، اور علیٰ ہذا، یہاں تک کہ نقطہ ن حاصل ہو۔ تب منحنی ۱ د ع ..... ن دیے ہوئے منحنی کا حاصل جمع منحنی ہوگا اور ب ن کسی پیمانے پر پورے منحنی کے رقبے کو تعبیر کریگا۔

ثبوت ــــ کسی ایک حصے مثلاً ۴ پر غور کرو اور ف و افقاً کھینچو۔ اب مثلث ف، گ، و مثلث ط، ۴ب، ۱ کے مشابہ ہوگا

$$\therefore \frac{\text{گ و}}{\text{ف و}} = \frac{\text{۴ب، ۱}}{\text{ط ۱}}$$

کسی { قوت (ق) / کمیت (ک) / رقبہ (ب) / حجم (ح) } کو ایک دیے ہوئے نقطہ یا محور سے
اس کا جو فاصلہ ر ہو اس سے ضرب دینے سے جو چیز حاصل
ہو وہ اس { قوت / کمیت / رقبہ / حجم } کا پہلا معیار دیے ہوئے نقطے یا محور کے گرد ہے۔
عام طور پر اس کو صرف معیار کہتے ہیں۔

قوت کی صورت میں معیار دیے ہوئے نقطے یا محور کے گرد گھومنے کے تقاضے کا پیمانہ ہے۔ اور اس معیار کو علامت مثبت یا منفی اس لحاظ سے دی جاتی ہے کہ یہ گردش کس سمت میں واقع ہونا چاہتی ہے۔ عموماً موافق سمتِ ساعت سمت کو مثبت اور مخالف سمتِ ساعت سمت کو منفی سمجھا جاتا ہے۔ اب اگر کوئی استوار جسم قوتوں کے کسی دیے ہوئے نظام کے تحت تعادل میں ہو تو اس میں کسی نقطے یا محور کے گرد گھومنے کا اقتضا نہیں ہوگا۔ اِس طرح یہ بنیادی قاعدہ حاصل ہوتا ہے:-

کوئی جسم تعادل میں ہو تو اس پر عمل کرنے والی تمام قوتوں کے معیاروں کا جبری مجموعہ کسی نقطے یا محور کے گرد صفر ہوگا۔

ذیل کی عددی مثالوں سے اِس مسئلہ کے دو اطلاق نظریۂ تعمیر پر واضح ہونگے۔ کتاب میں اَور کئی مثالیں آئینگی اور جو اِس مضمون سے ناواقف ہوں وہ اُن سوالات کو حل کریں جو کتاب کے آخر میں دیے گئے ہیں۔

مثال ۱۔ ۲۰ فٹ فصل کے ایک آزادانہ سہارے ہوئے

شہتیر پر ½ ٹن، ¼ ٹن، ۱ ٹن اور ۲ ٹن کے بوجھ شکل ۲۰ میں دکھائے ہوئے فاصلوں پر عمل کرتے ہیں۔ سروں کے ردِّ عمل رو اور رب معلوم کرو۔

شہتیر بوجھوں اور ردِّ عملوں کے تحت تعادل میں ہے۔ اس لیے قوتوں کا سمتی مجموعہ صفر ہوگا۔ متوازی قوتوں کی صورت میں سمتی مجموعہ جبری مجموعے کے مساوی ہوتا ہے۔

∴ رو + رب = ½ + ¼ + ۱ + ۲ = ۳٫۷۵ ٹن

رو معلوم کرنے کے لیے ب کے گرد معیار لو جس سے رب کا معیار ساقط ہو جائیگا۔ اور

و۱ کا معیار = ۱۷ × ½ = ۸٫۵۰ فٹ ٹن
و۲ " = ۱۳ × ¼ = ۳٫۲۵ "
و۳ " = ۷ × ۱ = ۷٫۰۰ "
و۴ " = ۴ × ۲ = ۸٫۰۰ "
∴ وزنوں کا مجموعی معیار = ۲۶٫۷۵ "

یہ مخالف سمتِ ساعت معیار ہے اور موافق سمتِ ساعت معیار رو × ۲۰ کے مساوی ہونا چاہیے۔

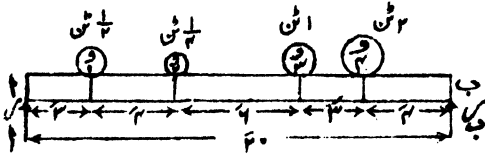
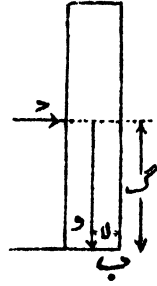
∴ ۲۰ رو = ۲۶٫۷۵

∴ رو = ۲۶٫۷۵ / ۲۰ = ۱٫۳۳۷ ٹن

یا لکھو ۱٫۳۴ ٹن

∴ رب = ۳٫۷۵ − ۱٫۳۴

= ۲٫۴۱ ٹن

حساب کی صحت کی جانچ اس طرح ہوسکتی ہے کہ ا کے گرد معیار لے کر حساب معلوم کیا جائے۔

شکل ۲۰

شکل ۲۱

مثال ۲۔ ایک دیوار کا وزن جو ۱۸ انچ موٹی اور ۸ فٹ اونچی ہے، ۱۰ ٹن ہے۔ معلوم کرو کہ دیوار کو الٹ دینے کے لیے دیوار کے مرکز پر ہوا کا کتنا دباؤ ضروری ہے (شکل ۲۱)۔

نقطہ ب کے گرد معیار لینے سے (شکل ۲۱) ہوا کی وجہ سے معیار جو موافق سمتِ ساعت ہے د × گ ہوگا اور دیوار کے وزن کی وجہ سے معیار جو مخالف سمتِ ساعت ہے و × لا ہوگا۔ دیوار جب عین الٹنے کو ہو تو یہ مساوی ہونگے۔

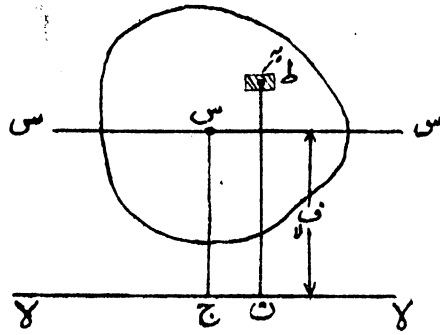
$$\therefore \quad د \times گ = و \times لا$$

$$۴ د = \frac{۹ \times ۱۰}{۱۲}$$

$$د = \frac{۹ \times ۱۰}{۱۲ \times ۴} = ۱.۸۷۵ \text{ ٹن}$$

کسی نقطے کے گرد چند دی ہوئی قوتوں کے پہلے معیار کی ترسیمی دریافت — یہ ریسمانی اور سمتی کثیر الاضلاع والے عمل کے ذریعے حاصل کیا جاتا ہے (دیکھو شکل ۱۶)۔

فرض کرو کہ قوتوں کے دیے ہوئے نظام کا معیار نقطہ ص کے گرد

مطلوب ہے۔ ص میں سے ایک خط حاصل رح کے متوازی کھینچو جو پہلی اور آخری مخروجہ کڑیوں کو ھ اور گ پر قطع کرے۔ تب اگر سمتی نقشے میں نقطہ ط خط ۰، ۵ سے عمودی یا قطبی فاصلہ ق پر ہو تو ص کے گرد قوتوں کے نظام کا معیار گ ھ × ق ہوگا جس میں گ ھ کو مکانی پیمانے پر اور ق کو قوتوں کے پیمانے پر پڑھنا ہوگا۔

شکل ۲۲ — رقبے کا پہلا معیار

ثبوت:- مثلثات ف گ ھ اور ط، ۰، ۵ مشابہ ہیں۔

∴ $\frac{\text{گ ھ}}{\text{ص}} = \frac{\text{۰، ۵}}{\text{ق}}$

∴ ق × گ ھ = ۰، ۵ × ص

لیکن ۰، ۵ = حاصل رح

اور ص = ح کا فاصلہ ص سے

∴ ۰، ۵ × ص = قوتوں کے نظام کا معیار ص کے گرد۔

∴ ق × گ ھ = قوتوں کے نظام کا معیار ص کے گرد۔

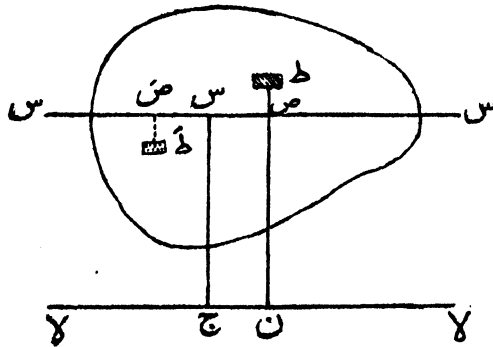
کسی رقبے کا پہلا معیار — فرض کرو کہ کسی شکل کے اندر

ایک چھوٹا سا رقبہ بہ نقطۂ ط پر واقع ہے (شکل ۲۲)، اور فرض کرو کہ لالا کوئی خط مستقیم یا محور ہے۔ تب اگر ط ن علی القوایم کھینچا گیا ہو لالا کے، تو بہ × ط ن اِس چھوٹے رقبہ کا پہلا معیار دیے ہوئے خط کے گرد ہوگا۔ اب اگر پوری شکل، بہ جیسے چھوٹے چھوٹے رقبوں میں تقسیم کی جائے اور ہر ایک ٹکڑے کا معیار لالا کے گرد لیا جائے اور ان سب معیاروں کو جمع کیا جائے تو یہ حاصل مجموعہ رقبے کا پہلا معیار ہوگا۔

∴ پورے رقبے کا پہلا معیار بہ × ط ن جیسی مقداروں کا حاصل جمع ہے۔ اس کو جبری طور پر یوں لکھتے ہیں :—

پورے رقبے کا پہلا معیار = ∑ (بہ × ط ن)۔

کسی رقبے کا مرکزِ **ہندسی** یا پہلے معیار کا مرکز وہ نقطہ ہے جس پر پورے رقبے کو مرتکز سمجھنے سے کسی خط کے گرد اِس رقبے کا وہی معیار حاصل ہو جو اصلی رقبے کا پہلا معیار اس خط کے گرد ہے۔

شکل ۲۳

اِس طرح اگر رقبے کا مرکزِ ہندسی س ہو اور س ج خط لالا پر عمود کھینچا جائے اور پوری شکل کا رقبہ ب ہو تو

ب × س ج = ∑ (بہ × طن)

∴ س ج = ∑ (بہ × طن) / ب

اِس سے س کا ٹھیک محل معین نہیں ہوگا بلکہ صرف خط لا لا سے اس کا فاصلہ۔ اگر مرکزِ ہندسی کا ٹھیک محل مطلوب ہو تو ایک اَور خط کے گرد معیار لینا چاہیے جو لا لا کے متوازی نہ ہو۔ تب اِن دونو خطوط سے جو فاصلے حاصل ہوں اُن سے مرکزِ ہندسی کا محل معین ہو جائیگا۔

مرکزِ ہندسی کے متعلق یہ بات معلوم ہو کہ مرکزِ ہندسی کا محل صرف رقبے کی شکل پر منحصر ہے اُن محوروں کے محل پر منحصر نہیں جن کے گرد معیار لیے گئے۔

قوتوں کی طرح رقبوں کے معیار بھی مثبت اور منفی ہوتے ہیں۔ معیار مثبت اُس وقت ہوتا ہے جب کہ رقبے کا زیرِ غور ٹکڑا محور کے اوپر یا دائیں طرف ہو اور منفی جبکہ نیچے یا بائیں طرف ہو۔

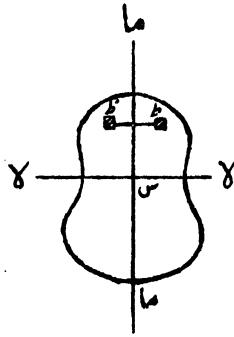
مرکزِ ہندسی میں کے کسی خط کے گرد پہلا معیار۔

مرکزِ ہندسی میں کے ایک خط س س کے گرد رقبے کے پہلے معیار پر غور کرو (شکل ۲۳) خط کے اوپر کے حصوں مثلاً ط پر کے حصے کا معیار مثبت ہوگا اور نیچے کے حصوں مثلاً طَ پر کے حصے کا معیار منفی ہوگا۔

اِس صورت میں س ج صفر ہے اِس لیے ب × س ج بھی صفر ہے۔ اِس طرح یہ قاعدہ حاصل ہوتا ہے کہ کسی رقبے کا پہلا معیار اس کے مرکزِ ہندسی میں کے کسی خط کے گرد صفر ہوتا ہے۔

محاورِ تشاکل کے لحاظ سے مرکزِ ہندسی کا محل

فرض کرو کہ ایک رقبے کا ایک محورِ تشاکل ما ما ہے (شکل ۲۴)۔ تب یہ خط رقبے کو دو بالکل مشابہ نصفوں میں تقسیم کرتا ہوگا۔ اِس طرح رقبے کے ہر حصے (مثلاً ط) کے جواب میں جس کا معیار ما ما کے گرد مثبت ہے ایک مساوی رقبہ (طَ)

موجود ہوگا جس کا معیار ما ما کے گرد ط پر کے حصے کے معیار کے مساوی اور

شکل ۲۴

منفی ہوگا۔ اِس طرح پورے رقبے کا معیار ما ما کے گرد صفر ہوگا، یعنی ما ما مرکزِ ہندسی میں سے گزرتا ہوگا۔

اگر شکل کا کوئی اَور محورِ تشاکل ل ل ہو تو مرکزِ ہندسی اِس پر بھی واقع ہوگا۔ اِس طرح یہ قاعدہ حاصل ہوتا ہے کہ کسی شکل کا مرکزِ ہندسی اِس کے دو محاورِ تشاکل کے تقاطع پر ہوتا ہے۔

مختلف صورتوں میں مرکزِ ہندسی کے محل کے لیے دیکھو صفحہ ۱۰۶، ۱۰۷۔

یہ معلوم ہونا چاہیے کہ کسی رقبے کا مرکزِ ہندسی وہی ہوگا جو اس رقبے کی شکل کے ایک شسلے کا مرکزِ جاذبہ ہوگا۔

دوسرے معیار یا معیارِ جمود — کسی { قوت ق، کمیت ک، رقبہ ب، حجم ح }

اور ایک دیے ہوئے نقطے یا محور سے اس کے فاصلے ر کے مربع سے کے

شکل ۲۵۔ رقبہ کا دوسرا معیار یا معیارِ جمود

گردش کرنے والے اجسام کی بحث میں کمیت کے دوسرے معیار سے سابقہ پڑتا ہے اور اس چیز کو معیارِ جمود کا نام دیا گیا ہے۔ تعمیروں کے کام میں دوسرے معیار کے استعمال کے وقت جمود سے کوئی تعلق نہ ہوگا۔ لیکن یہاں بھی معیارِ جمود کا لفظ عام طور پر اختیار کر لیا گیا ہے اس لیے اس کو ہم بھی استعمال کرینگے لیکن یہ یاد رکھنا چاہیے کہ یہ بالکل ایک استعارہ ہے۔

رقبوں کے لیے اس کا استعمال ـــ اگر کسی نقطۂ ط پر ایک

چھوٹا رقبہ بہ ہو (شکل ۲۵) اور کسی خط لا لا پر ط ن عمود کھینچا جائے تو خط لا لا کے گرد اس رقبے کا دوسرا معیار به × ط ن۲ ہوگا۔ اب اگر جیسا کہ پہلے معیار کی صورت میں کیا گیا، پورے رقبے کو چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے اور ہر ایک کا دوسرا معیار لیا جائے تو لا لا کے گرد پورے رقبے کا دوسرا معیار اُن حصّوں کے دوسرے معیاروں کا حاصل جمع ہوگا۔ دوسرے معیار کو حرف آ سے تعبیر کیا جاتا ہے اور جس خط کے گرد یہ لیا گیا ہے اس کو بطور لاحقہ کے لگا دیتے ہیں مثلاً آ~لالا~

اس طرح آ~لالا~ = ∑ (به × ط ن۲)

اسی طرح خط ما ما لیں تو

آ~ماما~ = ∑ (به × ط م۲)

اب فرض کرو کہ ھ ایک ایسا نقطہ ہے جس پر پورے رقبے کو مرتکز سمجھنے سے لا لا اور ما ما کے گرد وہی دوسرے معیار حاصل ہوں جو ان خطوط کے گرد اصلی رقبے کے ہیں۔

تب ب × ھ ص۲ = آ~لالا~

اور ب × ھ س۲ = آ~ماما~

تب نقطہ ھ کو محاور لا لا اور ما ما کے لحاظ سے رقبے کا ثانویہ (Secondroid) (مرکزِ ہندسی کی مماثلت سے) کہہ سکتے ہیں۔ ثانویہ کے متعلق قابلِ لحاظ بات یہ ہے کہ اس کا محل اُن محاور کے محل پر منحصر ہے جن کے گرد معیار لیے گئے ہیں، مرکزِ ہندسی میں ایسا نہیں۔

محاور لا لا اور ما ما سے ثانویہ کے فاصلوں کو اِن محاور کے گرد دوسرے معیار کے نصف قطر یا گردشی نصف قطر کہا جاتا ہے اور گ~لا~ اور گ~ما~ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

اس طرح $\text{ب}\,\text{گ}_{\text{ا}}^{2} = \text{آ}_{\text{لالا}} = \Sigma\,(\text{ب} \times \text{ط ن}^{2})$

یا $\text{گ}_{\text{ا}} = \sqrt{\dfrac{\text{آ}_{\text{لالا}}}{\text{ب}}}$

اور $\text{ب}\,\text{گ}_{\text{ما}}^{2} = \text{آ}_{\text{ماما}} = \Sigma\,(\text{ب} \times \text{ط م}^{2})$

یا $\text{گ}_{\text{ما}} = \sqrt{\dfrac{\text{آ}_{\text{ماما}}}{\text{ب}}}$

عملاً دوسرا معیار ہمیشہ مرکزِ ہندسی میں کے کسی خط کے گرد مطلوب ہوتا ہے اور وہ اِس طرح حاصل کیا جاتا ہے:-

کسی رقبے کا دوسرا معیار ایک دیے ہوئے خط کے گرد معلوم ہے تو مرکزِ ہندسی میں کے متوازی خط کے گرد معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ $\text{آ}_{\text{لالا}}$ معلوم ہے۔

تو
$$\text{آ}_{\text{لالا}} = \Sigma\,(\text{ب} \times \text{ط ن}^{2})$$
$$= \Sigma\left\{\text{ب} \times (\text{ط ج} + \text{ج ن})^{2}\right\}$$
$$= \Sigma\left\{\text{ب} \times (\text{ط ج} + \text{ف}_{\text{ا}})^{2}\right\}$$
$$= \Sigma\left\{\text{ب} \times (\text{ط ج}^{2} + 2\,\text{ط ج} \times \text{ف}_{\text{ا}} + \text{ف}_{\text{ا}}^{2})\right\}$$
$$= \Sigma\,(\text{ب} \times \text{ط ج}^{2}) + \Sigma\,(\text{ب} \times 2\,\text{ط ج} \times \text{ف}_{\text{ا}}) + \Sigma\,(\text{ب} \times \text{ف}_{\text{ا}}^{2})$$

بائیں جانب کی رقموں میں

Σ (بہ × طج^2) = آ$_{سلا}$ (جو مطلوب ہے)

اور Σ (بہ × ۲ طج × ف$_{لا}$) = ۲ ف$_{لا}$ Σ (بہ × طج)

= ۲ ف$_{لا}$ × (رقبے کا پہلا معیار خط سلا س کے گرد جو مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے)

= ۲ ف$_{لا}$ × صفر

= صفر

Σ (بہ × ف$^2_{لا}$) = ف$^2_{لا}$ Σ بہ

= ف$^2_{لا}$ × (پوری شکل کا رقبہ)

= ف$^2_{لا}$ × ب

∴ آ$_{لالا}$ = آ$_{سلا}$ + ب × ف$^2_{لا}$

یا آ$_{سلا}$ = آ$_{لالا}$ − ب × ف$^2_{لا}$

اسی طرح آ$_{سما}$ = آ$_{ماما}$ − ب × ف$^2_{ما}$

معیار کا یا جمود کا ناقص ـــــ کسی تراش کے صدر محاور مرکز ہندسی میں کے وہ دو علی القوائم محاور ہیں جن کے حوالے سے بہ × طم × طن جیسی مقداروں کا حاصل جمع (جسے حاصل ضربی معیار یا جمود کا حاصل ضرب کہتے ہیں) صفر ہو۔

جن تراشوں میں کوئی محور تشاکل ہو وہ صدر محوروں میں سے ایک ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ لا لا اور ما ما (شکل ۲۶) ایک تراش کے صدر محاور ہیں اور فرض کرو کہ اِن محوروں کے گرد گردشی نصف قطر گ$_{لا}$ اور گ$_{ما}$ ہیں۔ و کو مرکز

مان کر ایک ناقص کھینچو جس میں و لا مساوی گ$_{ہا}$ کے اور و ما مساوی گ$_{لا}$ کے ہو۔ تو یہ ناقص معیار کا ناقص یا جمود کا ناقص کہلاتا ہے۔

و میں سے گزرنے والے کسی خط ے ے کے گرد جو لا لا سے زاویہ طہ بناتا ہو گردشی نصف قطر حاصل کرنے کے لیے ے ے کے متوازی ناقص کا مماس ی ی کھینچو اور اس پر عمود و ص کھینچو۔

تب   و ص = گ$_{ی}$

کیونکہ   آ$_{ے ے}$ = ع بہ ط سر^{2}

= ع بہ (ط س ـ س سر)^{2}

= ع بہ (ط س ـ ن ت)^{2}

= ع بہ (ما جم طہ ـ لا جب طہ)^{2}

= ع بہ لا^{2} جب^{2} طہ + ع بہ ما^{2} جم^{2} طہ ـ ع ۲ بہ لا ما جب طہ جم طہ

= جب^{2} طہ ع بہ لا^{2} + جم^{2} طہ ع بہ ما^{2} ـ ۲ جب طہ جم طہ ع بہ لا ما

شکل ۲۶ - معیار کا یا جمود کا ناقص

اِس میں Σ بہ لا ما حاصل ضربی معیار ہے اور چونکہ لا لا اور ما ما صدر محاور ہیں اِس لیے یہ صفر ہوگا۔

$$\therefore \quad \text{آ}_{\text{ےے}} = \text{جب}^2\text{طہ}\ \Sigma(\text{بہ لا}^2) + \text{جم}^2\text{طہ}\ \Sigma(\text{بہ ما}^2)$$

$$= \text{آ}_{\text{ماما}}\ \text{جب}^2\text{طہ} + \text{آ}_{\text{لالا}}\ \text{جم}^2\text{طہ}$$

$$\therefore \quad \text{ب گ}_{\text{ی}}^2 = \text{ب گ}_{\text{ما}}^2\ \text{جب}^2\text{طہ} + \text{ب گ}_{\text{لا}}^2\ \text{جم}^2\text{طہ}$$

$$\text{یا} \quad \text{گ}_{\text{ی}}^2 = \text{گ}_{\text{ما}}^2\ \text{جب}^2\text{طہ} + \text{گ}_{\text{لا}}^2\ \text{جم}^2\text{طہ}$$

اس لیے ناقص کے خواص کی رُو سے $\text{و ص} = \text{گ}_{\text{ی}}$

جن صورتوں میں کوئی محورِ تشاکل نہ ہو اِن میں صدر محاور معلوم کرنے کا عمل یہ ہے :۔

(ا) پہلے ترسیمی طریقہ سے یا حساب سے مرکزِ ہندسی میں سے گزرنے والے دو علی القوائم محاور کے گرد حاصل ضربی معیار اور گردشی نصف قطر معلوم کرو۔

فرض کرو کہ حاصل ضربی معیار ب ح^2 ہے اور گردشی نصف قطر $\text{گ}_{\text{لا}}$ اور $\text{گ}_{\text{ما}}$ ہیں۔

تب $\text{گ}_{\text{لا}}$ یا $\text{گ}_{\text{ما}}$ سے صدر محاور کا زاویۂ میلان طہ ذیل کے ربط سے حاصل ہوگا:

$$\text{مس ۲ طہ} = \frac{\text{۲ ح}^2}{\text{گ}_{\text{لا}}^2 - \text{گ}_{\text{ما}}^2}$$

(ب) ترسیمی طریقے سے یا حساب سے دی ہوئی شکل کے دوسرے معیار لا لا اور ما ما کے گرد معلوم کرو جو باہم علی القوائم ہوں اور مرکزِ ہندسی میں سے گزرتے ہوں۔ اور نیز ایک اَور خط ےے کے گرد معلوم کرو جو اِن دونوں سے ۴۵ پر ہو۔

تب اگر لا لا اور ما ما سے صدر محاور کا زاویۂ میلان طہ ہو تو

$$\text{مس ۲ ط} = \frac{آ_{لا} + آ_{ما} - ۲\,آ_{ی}}{آ_{لا} - آ_{ما}}$$

یا
$$\text{مس ۲ ط} = \frac{گ^{۲}_{لا} + گ^{۲}_{ما} - ۲\,گ^{۲}_{ی}}{گ^{۲}_{لا} - گ^{۲}_{ما}}$$

[ایک قاعدہ جو بعض اوقات جمود کے معیاروں کے حسابات میں کارآمد ہوتا ہے یہ ہے:
کسی دیے ہوئے نقطے میں سے گزرنے والے کوئی دو علی القوائم خطوط لیے جائیں اُن کے گرد کے جمود کے معیاروں کا حاصل جمع وہی ہوتا ہے۔]

شرط کہ حاصل ضربی معیار صفر ہو —— یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ دو خطوط کے گرد حاصل ضربی معیار کے صفر ہونے کی شرط یہ ہے کہ یہ خطوط معیار کے ناقص کے مزدوج قطر ہوں۔

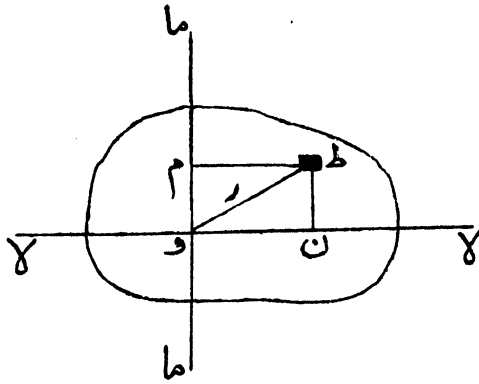
معیار کے ناقص پر ایک عددی مثال صفحہ ۲۱۶ پر دی گئی ہے۔

مرکزِ ہندسی میں کے کسی دو علی القوائم خطوط کے گرد دوسرے معیار —— اوپر قوسین میں جو قاعدہ بتایا گیا ہے اس کی رُو سے مرکزِ ہندسی میں سے گذرنے والے دو علی القوائم خطوط کے گرد معیارِ جمودوں کا مجموعہ مستقل ہوگا۔

کسی شکل کا دوسرا معیار یا معیارِ جمود ایک اس کے مستوی کے علی القوائم محور کے گرد —— کسی رقبے کا دوسرا معیار یا معیارِ جمود اس کے مستوی کے علی القوائم ایک محور و کے گرد قطبی دوسرا معیار یا قطبی معیارِ جمود کہلاتا ہے اور $\sum$ (بہ × ط و^{۲}) کے مساوی ہوتا ہے۔

و میں سے کوئی دو علی القوائم محور شکل کے مستوی میں لا لا اور ما ما کھینچو (شکل ۲۷)۔ تب

$$\text{ط و}^2 = \text{ط ن}^2 + \text{ن و}^2$$
$$= \text{ط ن}^2 + \text{ط م}^2$$
$$\therefore \Sigma\,(\text{ب} \times \text{ط و}^2) = \Sigma\,\text{ب} \times \text{ط ن}^2 + \Sigma\,\text{ب} \times \text{ط م}^2$$
$$= \text{آ}_{\text{لا لا}} + \text{آ}_{\text{ما ما}}$$

اِس سے ذیل کا قاعدہ حاصل ہوتا ہے :۔

شکل ۲۷ ۔ جمود کا قطبی معیار

رقبے کے کسی علی القوائم محور کے گرد دوسرا معیار یا معیارِ جمود اُن دو علی القوائم محوروں کے گرد کے جمود کے معیاروں کے حاصل جمع کے مساوی ہوتا ہے جو اِس محور میں سے رقبے کے مستوی میں کھینچے جائیں۔

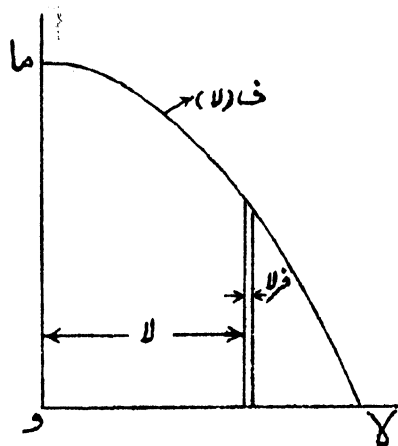
مرکزِ ہندسی، معیارِ جمود، اور گردشی نصف قطر حاصل کرنا۔

(۱) ریاضی سے ـــ تفاعل ما = ف (لا) کے منحنی پر غور کرو۔
تب محور لا کے متوازی فرلا عرض کی ایک پٹی پر غور کیا جائے (شکل ۲۸) تو

منحنی کا رقبہ = $\int$ ف (لا) فرلا

رقبے کا پہلا معیار و ما کے گرد = ∫ف (لا) فرلا × لا

رقبے کا دوسرا معیار و ما کے گرد = ∫ف (لا) فرلا × لا^{۲}

مثلاً مکافی ما^{۲} = ۴ و لا پر غور کرو اور منحنی اور محور لا کے درمیان کا رقبہ لو۔ (شکل ع ۲۹)۔

شکل ع ۲۸

منحنی کا رقبہ = ∫ ما فرلا = ∫ ۲ و$^{\frac{1}{2}}$ لا$^{\frac{1}{2}}$ فرلا

= ۲ و$^{\frac{1}{2}}$ $\int_{0}^{ض}$ لا$^{\frac{1}{2}}$ فرلا = $\Big[$ ۲ و$^{\frac{1}{2}}$ × $\frac{2}{3}$ لا$^{\frac{3}{2}}$ $\Big]_{0}^{ض}$

= $\frac{4}{3}$ و$^{\frac{1}{2}}$ ض$^{\frac{3}{2}}$

لیکن ۲ و$^{\frac{1}{2}}$ ض$^{\frac{1}{2}}$ = ع

∴ منحنی کا رقبہ = $\frac{2}{3}$ ض ع

$$\text{وما کے گرد پہلا معیار} = \int \text{لا ما فرلا} = \int ۲\,\text{و}^{\frac{۱}{۲}}\,\text{لا}^{\frac{۳}{۲}}\,\text{فرلا}$$

$$= ۲\,\text{و}^{\frac{۱}{۲}} \int_{\text{ب}}^{\text{ض}} \text{لا}^{\frac{۳}{۲}}\,\text{فرلا} = \left[۲\,\text{و}^{\frac{۱}{۲}} \times \frac{۲}{۵}\,\text{لا}^{\frac{۵}{۲}}\right]_{\text{ب}}^{\text{ض}}$$

$$= \frac{۴}{۵}\,\text{و}^{\frac{۱}{۲}}\,\text{ض}^{\frac{۵}{۲}} = \frac{۲}{۵}\,\text{ض}^{۲}\,\text{ع}$$

$$\therefore \text{مرکز ہندسی کا فاصلہ وما سے} = \frac{\frac{۲}{۵}\,\text{ض}^{۲}\,\text{ع}}{\frac{۲}{۳}\,\text{ض ع}} = \frac{۳}{۵}\,\text{ض}$$

$$\text{وما کے گرد دوسرا معیار} = \int \text{لا}^{۲}\,\text{ما فرلا} = \int ۲\,\text{و}^{\frac{۱}{۲}}\,\text{لا}^{\frac{۵}{۲}}\,\text{فرلا}$$

$$= ۲\,\text{و}^{\frac{۱}{۲}} \int_{\text{ب}}^{\text{ض}} \text{لا}^{\frac{۵}{۲}}\,\text{فرلا} = \left[۲\,\text{و}^{\frac{۱}{۲}} \times \frac{۲}{۷}\,\text{لا}^{\frac{۷}{۲}}\right]_{\text{ب}}^{\text{ض}}$$

$$= \frac{۴}{۷}\,\text{و}^{\frac{۱}{۲}}\,\text{ض}^{\frac{۷}{۲}} = \frac{۲}{۷}\,\text{ض}^{۳}\,\text{ع}$$

$$\therefore \text{گ}^{۲} = \frac{\frac{۲}{۷}\,\text{ض}^{۳}\,\text{ع}}{\frac{۲}{۳}\,\text{ض ع}} = \frac{۳}{۷}\,\text{ض}^{۲}$$

$$\therefore \text{گ} = \sqrt{\frac{۳}{۷}}\,\text{ض}$$

شکل ۲۹

اگر قاعدہ سے لا کے گرد دوسرا معیار مطلوب ہو تو یہ عمل کیا جائیگا:۔

$$\text{آ}_{\text{ما}} = \frac{۲}{۷}\,\text{ض}^{۳}\,\text{ع}$$

$$\text{آ}_{\text{س س}} = \text{آ}_{\text{ما}} - \text{ب} \times \text{ف}^{۲}$$

$$= \frac{۲}{۷}\,\text{ض}^{۳}\,\text{ع} - \frac{۲}{۳}\,\text{ض ع} \times \frac{۹\,\text{ض}^{۲}}{۲۵}$$

$$= \frac{۸}{۱۷۵}\,\text{ض}^{۳}\,\text{ع}$$

$$\text{آ}_{\text{لا}} = \text{آ}_{\text{س س}} + \text{ب} \times \text{ف}_{۱}^{۲}$$

$$= \frac{۸}{۱۷۵}\,\text{ض}^{۳}\,\text{ع} + \frac{۸}{۷۵}\,\text{ض}^{۳}\,\text{ع}$$

$$= \frac{۱۶}{۱۰۵}\,\text{ض}^{۳}\,\text{ع}$$

عام طور پر استعمال میں آنے والی اشکال کے دوسرے معیاروں کی فہرست صفحہ ۱۰۶/۱۰۷ پر دی گئی ہے۔

عملاً یہ اکثر ہوتا ہے کہ ریاضی کا طریقہ ناقابلِ عمل ہوتا ہے۔ اِسی صورت میں ذیل کے ترسیمی طریقے ضروری ہیں :۔

(ب) **ترسیمی** —— (ا) مرکزِ ہندسی —— فرض کرو کہ کوئی رقبہ ط د ص س (شکل ۳۰) ہے اور کوئی دو متوازی خط لا لا اور ما ما باہمی فاصلہ ھ پر ہیں۔

لا لا کے متوازی شکل میں ایک پتلی پٹی موٹائی ٹ کی لو اور فرض کرو کہ اِس کا مرکزی خط ط ص ہے۔ اِس مرکزی خط کے ایک سرے مثلاً ص سے ما ما پر عمود ص م ڈالو اور دوسرے سرے سے لا لا پر عمود ط ن ڈالو۔

م ن کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ ط ص کو ص۱ پر قطع کرتا ہے اور م ص کو خارج کرکے لا لا سے ل پر ملنے دو۔

تب مثلثات ط ن ص۱ اور م ن ل مشابہ ہونگے۔

$$\therefore \quad \frac{\text{ط ص}_{۱}}{\text{ط ن}} = \frac{\text{ن ل}}{\text{م ل}} = \frac{\text{ط ص}}{\text{ھ}}$$

شکل ۳۔ مرکزِ ہندسی اور معیارِ جمود، وغیرہ کی ترسیمی دریافت

طرفین کو ٹ سے ضرب دینے سے

طص × ٹ = (طص × ٹ × طن) / ھ = (پٹی طص کا رقبہ × طن) / ھ

∴ پٹی طص کا رقبہ = (پٹی طص کا پہلا معیار لا لا کے گرد) / ھ .... (۱)

اب اگر سارے رقبے کو پٹیوں میں تقسیم کر کے ص جیسے نقاط حاصل کیے جائیں اور ان نقاط کو ملایا جائے تو پہلے معیار کا منحنی رص س حاصل ہوگا۔

تب پہلے معیار کے منحنی کے بائیں جانب کا رقبہ طص جیسی پٹیوں کے رقبوں کا حاصل جمع ہوگا اس کو پہلے معیار کا رقبہ (ب) کہو۔ تب

ب = (پٹیوں کے پہلے معیاروں کا حاصل جمع لا لا کے گرد) / ھ

= پورے رقبے کا پہلا معیار / ھ

∴ پورے رقبے کا پہلا معیار = ب۱ × ھ

اور مرکز ہندسی کا فاصلہ لا لا سے = لا لا کے گرد پہلا معیار / شکل کا رقبہ

= ب۱ ھ / ب .... (۲)

کوئی انتصابی خط ف ب کھینچو جو لا لا کو ف پر اور ما ما کو ب پر قطع کرے اور ف میں سے کوئی مائل خط کھینچو اور اس پر طول ف ا لو جو کسی پیمانے پر ب کو تعبیر کرے اور ف ا۱ جو ب۱ کو تعبیر کرے۔ ا ب کو ملاؤ اور ا۱ ج اس کے متوازی کھینچو۔ تب ج میں سے لا لا یا ما ما کے متوازی خط کھینچنے سے اس پر مرکز ہندسی واقع ہوگا۔

کیونکہ ج ف / ف ب = ف ا۱ / ف ا

∴ ج ف / ھ = ب۱ / ب

یا ج ف = ب۱ ھ / ب

اور ربط (۱) کی رو سے یہ لا لا سے مرکز ہندسی کا فاصلہ ہے۔

(۲) دوسرا معیار — اگر لا لا کے گرد دوسرا معیار مطلوب ہو تو ما ما پر ص۱ م عمود کھینچو اور م۱ ن کو ملاؤ جو ط ص کو ص۲ پر قطع کرے، اور فرض کرو کہ م ص۱ مخروجہ لا لا سے ل۱ پر ملتا ہے۔

تب مثلثات ط ن ص۲ اور م۱ ن ل۱ کے مشابہ ہونے کی وجہ سے

$$\frac{\text{ط ص}_۲}{\text{ط ن}} = \frac{\text{ن ل}_۱}{\text{م ل}_۱} = \frac{\text{ط ص}_۱}{\text{ھ}}$$

$$\therefore \quad \text{ط ص}_۲ = \frac{\text{ط ص}_۱ \times \text{ط ن}}{\text{ھ}}$$

طرفین کو ٹ سے ضرب دینے سے

$$\text{ط ص}_۲ \times \text{ٹ} = \frac{\text{ط ص}_۱ \times \text{ٹ} \times \text{ط ن}}{\text{ھ}}$$

لیکن پہلے حاصل ہو چکا ہے کہ $\text{ط ص}_۱ \times \text{ٹ} = \frac{\text{پٹی ط ص کا رقبہ} \times \text{ط ن}}{\text{ھ}}$

$$\therefore \quad \text{ط ص}_۲ \times \text{ٹ} = \frac{\text{پٹی ط ص کا رقبہ} \times \text{ط ن}^۲}{\text{ھ}^۲}$$

$$\therefore \quad \text{پٹی ط ص}_۲ \text{ کا رقبہ} = \frac{\text{پٹی ط ص کا دوسرا معیار لا لا کے گرد}}{\text{ھ}^۲} \quad \text{...... (۳)}$$

اب اِس عمل کو ہر ایک پٹی پر کرو اور ص$_۲$ جیسے تمام نقاط کو ملاؤ تو دوسرے معیار کا منحنی ر ص$_۲$ س حاصل ہوگا۔

تب دوسرے معیار کے منحنی کے بائیں طرف کا رقبہ ط ص$_۲$ جیسی پٹیوں کے رقبوں کا حاصل جمع ہوگا۔ اس کو دوسرے معیار کا رقبہ (ب$_۲$) کہو۔ تب

$$\text{ب}_۲ = \frac{\text{لا لا کے گرد پٹیوں کے دوسرے معیاروں کا حاصل جمع}}{\text{ھ}^۲}$$

$$= \frac{\text{آ}_{\text{لالا}}}{\text{ھ}^۲}$$

$$\therefore \quad \text{آ}_{\text{لالا}} = \text{ب}_۲ \, \text{ھ}^۲ \quad \text{.............. (۴)}$$

ب$_۱$ یا ب$_۲$ کو ناپتے وقت کون سا رقبہ ناپا جائے اِس امر میں کسی قدر احتیاط کی ضرورت ہے۔ اِس میں کوئی مضایقہ نہیں کہ نیچے کی جانب انتصابی خط ط سے کھینچے جائیں یا ص سے

لیکن جب لالا اور ماما میں سے ایک مثلاً لالا کے گرد معیار مطلوب ہوں تو پہلے معیار کے رقبے کے لیے پہلے معیار کے منحنی کی اس جانب کا رقبہ ناپو جس سے لالا پر عمود کھینچے گئے ہیں اور دوسرے معیار کا منحنی کھینچتے وقت پہلے معیار کے منحنی کے ص$_1$ جیسے نقاط سے دوسرے خط ماما پر عمود کھینچو اور اب بھی اسی جانب کا رقبہ ناپو جس سے لالا پر عمود کھینچے گئے۔

اب خط ف ل$_1$ پر ف ل$_2$ لو جو ب$_2$ کو اسی پیمانے پر تعبیر کرے جس پر دوسرے رقبے ب$_1$، ب$_1$ تعبیر کیے گئے اور ل$_1$ ب کو ملا کر ل$_2$ د اس کے متوازی کھینچو۔

د ف پر ایک نصف دائرہ کھینچو اور لالا کے متوازی ایک خط ج ع کھینچو جو اس نصف دائرے کو ع پر ملے۔

تب ج ع محور ج ج کے گرد کے گردشی نصف قطر گ$_ج$ کے مساوی ہوگا۔

ثبوت :—

$$\frac{\text{ف د}}{\text{ف ب}} = \frac{\text{ف ل}_2}{\text{ف ل}_1} = \frac{\text{ب}_2}{\text{ب}_1}$$

$$\therefore \quad \text{ف د} = \frac{\text{ھ} \times \text{ب}_2}{\text{ب}_1} = \frac{\left(\dfrac{\text{ھ} \times \text{لالا}^{\text{آ}}}{\text{ھ}^2}\right)}{\left(\dfrac{\text{ب} \times \text{ج ف}}{\text{ھ}}\right)}$$

$$= \frac{\text{لالا}^{\text{آ}}}{\text{ب} \times \text{ج ف}} = \frac{\text{گ}_{\text{ل}}^2}{\text{ج ف}}$$

اب

$$\frac{\text{ف د}}{\text{ف ع}} = \frac{\text{ف ع}}{\text{ف ج}}$$

$$\therefore \quad \text{ف د} \times \text{ف ج} = \text{ف ع}^2$$

$$\therefore \quad \text{ف د} = \frac{\text{ف ع}^2}{\text{ج ف}}$$

$\therefore$ ف ع = $گ_{لا}$

اب ف ع^2 = ف ج^2 + ج ع^2

$\therefore$ $گ_{لا}^2$ = ج ع^2 + $ف_{لا}^2$

$\therefore$ ج ع^2 = $گ_{لا}^2$ − $ف_{لا}^2$

لیکن دکھایا جا چکا ہے کہ

$گ_{ج}^2$ = $گ_{لا}^2$ − $ف_{لا}^2$

$\therefore$ ج ع = $گ_{ج}$

عددی مثال —— پٹڑی کی تراش کے مرکزِ ہندسی کے گرد گردشی نصف قطر کی ترسیمی دریافت ——

شکل ۳۱ میں ایک برطانوی معیار کی ۸۵ پونڈ والی چپٹی پٹڑی کی تراش کے مرکزِ ہندسی کے گرد قاعدے کے متوازی گردشی نصف قطر کی ترسیمی دریافت دکھائی گئی ہے۔

چونکہ تراش ایک انتصابی مرکزی خط کے گرد متشاکل ہے اس لیے پہلے اور دوسرے معیار کے منحنیوں کو صرف نصف تراش کے لیے کھینچنا کافی ہے۔ اس سے عمل میں بہت آسانی ہو جائیگی۔ لا لا اور ما ما وہ اُفقی خط لیے گئے ہیں جو تراش کی چوٹی اور قاعدے کو مس کرتے ہیں۔

اب رقبے ب، $ب_1$، $ب_2$ سطح پیما یا حاصل جمع منحنی کے ذریعے معلوم کیے جائیں۔ (شکل کو پیچیدگی سے بچانے کے لیے پہلے اور دوسرے معیار کے منحنیوں کے حاصل جمع منحنی یہاں نہیں کھینچے گئے)۔ پہلے اور دوسرے معیار کے رقبے منحنیوں کی بائیں جانب ہیں۔

چونکہ صرف نصف تراش پر غور کیا گیا تھا اس لیے دو سے ضرب دینے سے

ب = ۸٫۳۶ مربع انچ

ب۱ = ۴٫۰۲ ″

ب۲ = ۳٫۰۵ ″

شکل کے بازو ﻻ ﻻ اور ما ما کے درمیان ایک انتصابی خط ف ب کھینچو اور نقاط ا، ا۱، ا۲ حاصل کرو جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔

شکل ۳۱۔ پٹری کی تراش

تب ا ب کو ملا کر اس کے متوازی ا۱ ج کھینچنے سے نقطۂ ج حاصل ہوگا اور ج ف خط ﻻ ﻻ سے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ ہوگا۔ اور ا۱ ب کو ملا کر اس کے متوازی ا۲ د کھینچنے سے نقطۂ د حاصل ہوگا۔

د ف پر ایک نصف دائرہ کھینچو اور ج ع افقاً کھینچو جو نصف دائرے کو ع پر ملے۔

تب ج ع = گ جو ناپنے پر ۱۰۹ء۱ انچ پایا جائیگا۔

اِس عمل کو طالب علم بطور مشق کے بطور خود کریں۔

اوپر کے طریقے کا اطلاق مستطیل پر

——— فرض کرو کہ ا ب ج د (شکل ۳۲ء) ایک مستطیل ہے جس کا قاعدہ ص اور ارتفاع ھ ہے اور لا لا اور ما ما کو علی الترتیب ج د اور ب ا کے خطوط میں سے گزرتا ہوا لو۔ تب پہلے معیار کا منحنی وتر ب ع د ہوگا، اور دوسرے معیار کا منحنی ایک مکافی ب ف د ہوگا۔ اِس طرح

$$ب_1 = \frac{ص\, ھ}{۲}$$

$$ب_2 = \frac{ص\, ھ}{۳}$$

$$\therefore \quad آ_{لالا} = \frac{ص\, ھ}{۳} \times ھ^2 = \frac{ص\, ھ^3}{۳}$$

$$ف_{لا} = \frac{ب_1 \times ھ}{ب} = \frac{ص\, ھ}{۲} \times \frac{ھ}{ص\, ھ} = \frac{ھ}{۲}$$

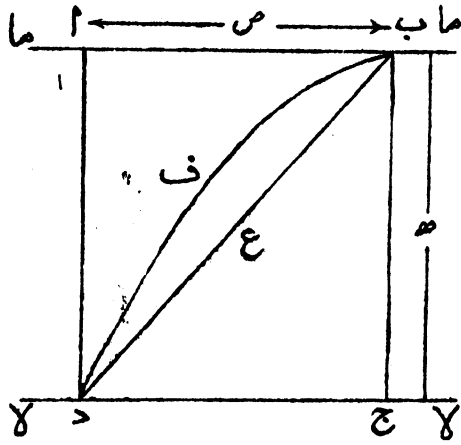
$$\therefore \quad آ_{ج} = آ_{لالا} - ب \times ف_{لا}^2$$

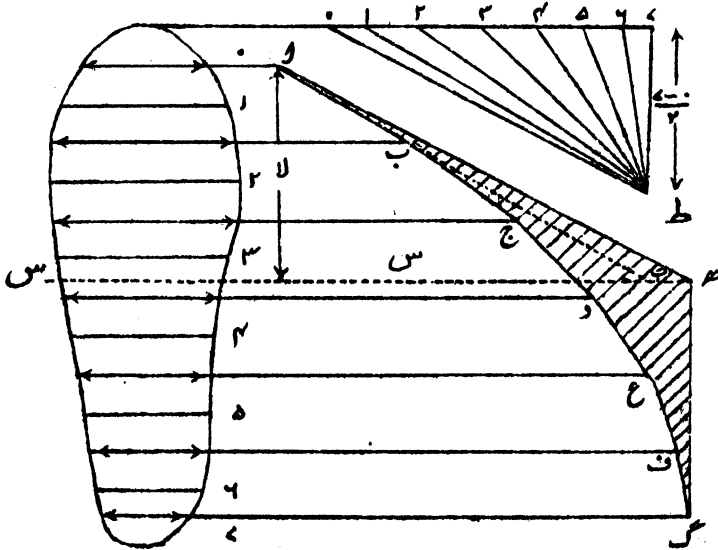
$$= \frac{ص\, ھ^3}{۳} - \frac{ص\, ھ \times ھ^2}{۴} = \frac{ص\, ھ^3}{۱۲}$$

متبادل ترسیمی ساخت ——— موہر[1] کا طریقہ ———

مرکزِ ہندسی کے گرد دوسرا معیار حاصل کرنے کے لیے ذیل کا ترسیمی طریقہ بعض صورتوں میں گزشتہ طریقے سے زیادہ سہولت بخش ہوگا۔ جس خط کے

[1] Mohr

گردمعیار لینا ہیں رقبے کو اس کے متوازی مساوی عرض کی پتلی پٹیوں میں

شکل ۳۲۔ مستطیل کا معیار جمود

تقسیم کرو (شکل ۳۳) اور ہر ایک پٹی کا مرکزی خط کھینچو۔ اب اگر پٹیاں کافی پتلی

شکل ۳۳۔ جمود کے معیار کے لیے مور کا عمل

ہوں (ہم نے پیچیدگی سے بچنے کے لیے تھوڑی سی پٹیاں لی ہیں) تو ان مرکزی خطوں کے طول ان پٹیوں کے رقبوں کو تعبیر کرینگے۔ اس لیے ایک سمتی خط پر کسی پیمانے پر ۰، ۱، ۲، ۳......... ۶، کے نشان لگاؤ جو کسی پیمانے پر ان طولوں کو تعبیر کریں اور ایک قطب ط اس سمتی خط سے مجموعی طول (۰ تا ۶) کے ۱/۲ فاصلے پر لو۔ پھر حصہ ۰ میں کہیں بھی ایک خط ا ھ متوازی ۰، ط کے کھینچو۔ حصہ ۱ میں ا ب متوازی ۱، ط کے۔ حصہ ۲ میں ب ج متوازی ۲، ط کے، اور علیٰ ہذا یہاں تک کہ نقطہ گ حاصل ہو جائے۔ اب آخری کڑی گ ھ متوازی آخری خط ۶، ط کے کھینچو جو ا ھ سے ھ پر ملے۔

تب مرکز ہندسی ھ میں کے متوازی خط پر واقع ہوگا اور اگر سایہ دار شکل کا رقبہ بہ ہو اور اصلی شکل کا رقبہ ب تو

$$\text{شکل کا } ا^2 \text{س س} = ب \times بہ$$

ثبوت۔ کسی ایک حصے مثلاً ۰، ۱ پر غور کرو اور ا ب کو خارج کر کے ھ میں کے افقی خط سے ب پر ملنے دو۔ تب رسیمانی اور سمتی کثیر الاضلاع کے عمل کی رُو سے اگر ان حصوں کے رقبوں کو قوتیں تصور کیا جائے تو (دیکھو صفحہ ۷۹)۔

$$\text{ب ھ} = \text{پہلی قوت کا معیار س س کے گرد} \times \frac{1}{\text{قطبی فاصلہ}}$$

$$= ۰،۱ \times لا \times \frac{1}{\frac{1}{2}\text{مجموعی رقبہ}}$$

$$= ۰،۱ \times لا \times \frac{2}{ب}$$

$$\text{مثلث ا ب ھ کا رقبہ} = \frac{1}{2}\ \text{ب ھ} \times لا$$

$$= \frac{۰،۱ \times لا^2 \times 2}{2\ ب}$$

حصے کا دوسرا معیار س س کے گرد
ـــــــــــــــــــــــــــــــــــــــ
ب

اصلی شکل کا دوسرا معیار س س کے گرد
∴ سایہ دار شکل کا رقبہ = ب = ـــــــــــــــــــــــــــــــــــــــ
ب

یا ب × ب = اصلی شکل کا دوسرا معیار س س کے گرد۔

اس کا ثبوت کہ ھ سے مرکزِ ہندسی معلوم ہوگا صفحہ ۶۹ پر ملیگا جس میں ثابت کیا گیا ہے کہ پہلی اور آخری کڑی کے نقطۂ تقاطع سے حاصل کا محل معلوم ہوتا ہے اور موجودہ صورت میں یہ مقام مرکزِ ہندسی ہوگا جہاں اِن حصوں کے رقبوں کو قوتیں تصور کرنے سے اِن کا حاصل عمل کرے۔

معادل مرکزِ ہندسی اور غیر متجانس تراشوں کا دوسرا

معیار ـــــ فرض کرو کہ کسی شہتیر کی تراش دو اشیاء سے بنی ہے جن کے لیے بینگ کا مقیاس مختلف ہے اور فرض کرو کہ ایک شے ش۱ کے لیے ینگ کا مقیاس دوسری شے ش۲ کا م گنا ہے۔ تب راست زور کی صورت میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ شے ش۱ اس طرح عمل کرتی ہے گویا اس کی جگہ اس کا م گنا رقبہ ش۲ کی شے کا رکھ دیا گیا ہے۔ شہتیر کی صورت میں بھی یہ ربط صحیح ہے اس لیے شے ش۱ کی جگہ اس کے م گنے عرض کا رقبہ شے ش۲ کا رکھ دیا جا سکتا ہے۔ یہ عرض اُس خط کے متوازی ہے جس کے گرد معیار لیے جائیں۔

اب اگر شے ش۱ کا رقبہ ب۱ اور ش۲ کا ب۲ ہو تو متجانس شے ش۲ کا معادل رقبہ یہ ہوگا :-

$$ب_ع = ب_۲ + م ب_۱$$

معادل مرکزِ ہندسی کا کسی خط لا لا سے فاصلہ ف معلوم کرنے کے لیے لا لا کے گرد ان رقبوں کے الگ الگ پہلے معیار لو جو فرض کرو کہ ھ۱ اور ھ۲ ہوتے ہیں۔

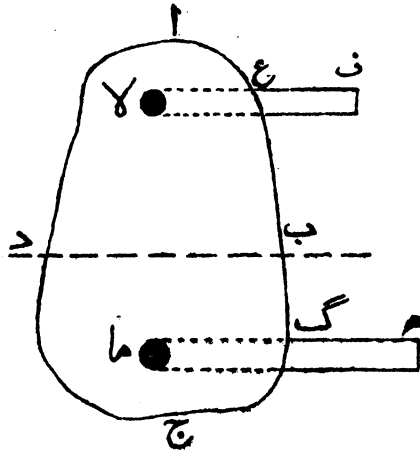
تب پوری تراش دوسری شے کی ہونے سے معادل پہلا معیار

$$ه_ع = ه_۲ + م ه_۱$$

$$\therefore \quad ف = \frac{ه_۲ + م ه_۱}{ب_۲ + م ب_۱}$$

معادل دوسرا معیار کسی خط لا لا کے گرد معلوم کرنے کے لیے لا لا کے گرد الگ الگ دوسرے معیار لو جو فرض کرو کہ آ۱ اور آ۲ ہوتے ہیں۔ تب پوری تراش دوسری شے کی ہونے سے معادل دوسرا معیار

$$آ_ع = آ_۲ + م آ_۱$$

اس کی عددی مثالیں اور مزید بیان مرکب شہتیروں اور محکم شہتیروں کی بحث میں دینگے۔ اوپر کے استدلال کو ترسیماً یوں دکھایا جاسکتا ہے:۔
فرض کرو کہ ا ب ج د (شکل ۳۴) کوئی رقبہ ہے جس میں مختلف

شکل ۳۴

شے کی دو سلاخیں لا اور ما گڑی ہوئی ہیں۔ کسی خط مثلاً نقطہ دار خط د ب کے

گردمعیار حاصل کرنے کے لیے ایک پٹی ع ف لو جو لا کی بلندی پہ ہو اور جس کا رقبہ لا کے رقبے کا (م-۱) گنا ہو اور اسی طرح ایک پٹی گ ہ جس کا رقبہ ما کا (م-۱) گنا ہو۔

تب دی ہوئی غیر متجانس شکل کا معادل پہلا اور دوسرا معیار وہی ہوگا جو متجانس شکل ا ع ف ب گ ہ ج د کا ہوگا۔

ع ف کو لا کا (م-۱) گنا اس لیے لیا جاتا ہے کہ سلاخ اپنے رقبے کا ایک گنا رقبہ تو خود گھیرتی ہے۔ اِس طرح دوسری شے کا معادل رقبہ = لا کا {(م-۱) + ۱} گنا = لا کا م گنا۔

کثیر الاستعمال اشکال کے رقبے، مرکزِ ہندسی کے محل، اور معیارِ جمود
(دیکھو شکل ۳۵)

نمبر	شکل	رقبہ	مرکزِ ہندسی کا محل: لالا سے	مرکزِ ہندسی کا محل: ماما سے	معیارِ جمود: آ لالا	معیارِ جمود: آ ماما	معیارِ جمود: آ وو	معیارِ جمود: آ ےے
۱	مستطیل	ض ع	$\frac{ع}{۲}$	$\frac{ض}{۲}$	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۳}$	$\frac{ع\,ض^{۳}}{۳}$	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۱۲}$	$\frac{ع\,ض^{۳}}{۱۲}$
۲	متوازی الاضلاع	ض ع	$\frac{ع}{۲}$	—	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۳}$	—	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۱۲}$	—
۳	مثلث	$\frac{ض\,ع}{۲}$	$\frac{ع}{۳}$	$\frac{ض}{۲}$	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۱۲}$	$\frac{۷\,ع\,ض^{۳}}{۴۸}$	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۳۶}$	$\frac{ع\,ض^{۳}}{۴۸}$
۴	منحرف (ا = ن ب)	$\frac{ض\,ع}{۲}(۱+ن)$	$\frac{ع}{۳}\left(\frac{۲ن+۱}{ن+۱}\right)$	—	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۱۲}(۳ن+۱)$	—	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۳۶}\left(\frac{ن^{۲}+۴ن+۱}{ن+۱}\right)$	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۱۲}(ن+۳)$
۵	مربع	$ض^{۲}$	—	—	—	—	$\frac{ض^{۴}}{۱۲}$	$\frac{ض^{۴}}{۱۲}$
۶	دائرہ	$\frac{\pi\,ق^{۲}}{۴}$	$\frac{ق}{۲}$	—	$\frac{۵\pi\,ق^{۴}}{۶۴}$	—	$\frac{\pi\,ق^{۴}}{۶۴}$	—
۷	ناقص	$\frac{\pi\,ق_{۱}\,ق_{۲}}{۴}$	—	—	—	—	$\frac{\pi\,ق_{۲}^{۳}\,ق_{۱}}{۶۴}$	$\frac{\pi\,ق_{۱}^{۳}\,ق_{۲}}{۲۴}$
۸	مکافی (اندرون)	$\frac{۲}{۳}$ ض ع	$\frac{۲}{۵}$ ع	$\frac{۳}{۸}$ ض	$\frac{۱۶}{۱۰۵}\,ض\,ع^{۳}$	$\frac{۲}{۱۵}\,ع\,ض^{۳}$	$\frac{۸}{۱۷۵}\,ض\,ع^{۳}$	—
۹	مکافی (بیرون)	$\frac{۱}{۳}$ ض ع	$\frac{۳}{۱۰}$ ع	$\frac{ض}{۴}$	—	—	—	—

شکل ۳۵ — عام شکلوں کے خواص

شکل ۳۶ - جمود کے معیار وغیرہ

برطانوی معیاری فولادی تراشوں کے خواص کے لیے دیکھو ضمیمہ -

تعمیروں میں استعمال ہونے والی تراشوں کے معیارِ جمود اور گردشی نصف قطر کا محسوب کرنا - کوئی تراش ایسی شکلوں پر مشتمل ہو جن کے معیارِ جمود معلوم ہوں تو اس کا معیارِ جمود اِن حصوں کے معیاروں کو جمع کرنے سے حاصل ہوگا - اِسی طرح اگر تراش دو معلومہ شکلوں کا حاصل تفریق ہو تو معیارِ جمود ان کے معیاروں کو تفریق کرنے سے حاصل ہوگا -

ذیل کی مثالوں سے اِس کا طریقِ عمل واضح ہوگا - دیکھو اشکال ۳۶ء اور ۳۷ء -

(۱) بکسی یا I تراش - جہاں تک خط ج ج کا تعلق ہے یہ ہندسی طور پر ایک دوسرے کے معادل ہیں کیونکہ اگر بکسی (Box) تراش کو انتصابی خط سے دو نصفوں میں کاٹ کر اِن نصفوں کو پشت بہ پشت ملایا جائے تو I تراش حاصل ہوگی - اِس طرح

$$آ_{ج ج} = \frac{ض ع^{۳} - (ض - ۲ ٹ_{۱}) (ع - ۲ ٹ)^{۳}}{۱۲}$$

(۲) کھوکھلی مدوّر تراش

$$آ_{ج ج} = \frac{\pi}{۶۴} (ق^{۴} - ق_{۱}^{۴})$$

اگر دھات کی موٹائی بہت چھوٹی ہو اور ٹ کے مساوی ہو تو

$$آ_{ج ج} = \text{تقریباً}\ \frac{\pi ق^{۳} ٹ}{۸}$$

(۳) نالی تراش (پہلوؤں کے میلان اور کونوں کی گولائی کو نظر انداز کرتے ہوئے) - شکل ۳۶ء (۳) میں دکھائی ہوئی تراش پر غور کرو -

رقبہ = ب = ۳٫۵ × ۴٫۷۵ + ۵٫۰۵ × ۳٫۷۵ + ۳٫۵ × ۴٫۷۵ = ۵۲٫۱۹ مربع انچ

خط لا لا سے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ ف معلوم کرنے کے لیے لا لا کے

گرد پہلا معیار لو۔ تب

ب × فلا = ۳٫۵ × ٫۴۷۵ × ۳٫۵/۲ + ۵٫۰۵ × ٫۳۷۵ × ٫۳۷۵ /۲

+ ۳٫۵ × ٫۴۷۵ × ۳٫۵ /۲

= ۲٫۹۱۰ + ٫۳۵۴ + ۲٫۹۱۰ = ۶٫۱۷۵

∴ فلا = ۶٫۱۷۵ / ۵٫۲۱۹ = ۱٫۱۸۵ انچ

لالا کے گرد دوسرا معیار = آلالا

= (۳٫۵)^۳ × ٫۴۷۵ /۳ + (٫۳۷۵)^۳ × ۵٫۰۵ /۳ + (۳٫۵)^۳ × ٫۴۷۵ /۳

= ۶٫۷۷۵ + ٫۰۸۹ + ۶٫۷۷۵ = ۱۳٫۶۳۹ انچ اکائیاں

∴ آجج = آلالا − ب × فلا^۲

= ۱۳٫۶۳۹ − (۵٫۲۱۹ × (۱٫۱۸۵)^۲)

= ۱۳٫۶۳۹ − ۷٫۳۲۳ = ۶٫۳۱۶ انچ اکائیاں

∴ گجج = √(آ/ب) = ۱٫۰۱۰ انچ

(۴) ڈھلے لوہے کے شہتیروں کی تراشیں۔

رقبہ = ب = ۲ × ۱½ + ۷ × ۱ + ۶ × ۱½ = ۱۹ مربع انچ

قاعدے کے گرد معیار

ب × فلا = ۳ × ۹٫۲۵ + ۷ × ۵ + ۹ × ٫۷۵

= ۲۷٫۷۵ + ۳۵ + ۶٫۷۵ = ۶۹٫۵ انچ اکائیاں

∴ فلا = ۶۹٫۵ / ۱۹ = ۳٫۶۵۸ انچ

∴ آجج = (۳٫۶۵۸)^۳ × ۶ /۳ − (۲٫۱۵۸)^۳ × ۵ /۳ + (۶٫۳۴۲)^۳ × ۲ /۳ − (۴٫۸۹۲)^۳ × ۱ /۳

= ۲۱۹٫۹۵ انچ اکائیاں

(۵) نرم فولاد کے ستون کی ساختہ تراش

— دو ۱۰ × ۳½ × ۲۱٫۶ کی نالیوں اور چار ۱۲" × ½" کی تختیوں سے بنی ہوئی۔ گ‌لا اور گ‌ما مطلوب۔ معیاری تراشوں کی جدول سے نالی دار تراشوں کے متعلق حسبِ ذیل مواد حاصل ہوتا ہے :—

ہر ایک کا رقبہ ۸٫۲۹۶ مربع انچ

مرکزِ ہندسی میں کے محور لالا کے گرد آ = ۱۱۷٫۹ انچ اکائیاں

" " " ماما " = ۸٫۱۹۴ "

مرکزِ ہندسی کا فاصلہ پیٹھے سے = ٫۹۳۳ انچ

∴ تراش کا مجموعی رقبہ = (½ × ۱۲ × ۴) + (۸٫۲۹۶ × ۲)

= ۴۰٫۵۹۲ مربع انچ

لالا کے گرد معیارِ جمود :—

۲ نالیاں (ہر ایک کا ۱۱۷٫۹) = ۲۳۵٫۸

۱۲ × ½ انچ کی تختیوں کے دو جوڑوں کا مرکزِ ہندسی کے گرد = $\frac{(۱)^۳ × ۱۲ × ۲}{۱۲}$ = ۲٫۰

تختیوں کے دو جوڑوں کے لیے ب × ف^۲ = ۲ × ۱۲ × (۵٫۵)^۲ = ۷۲۶٫۱

مجموعہ = ۹۶۳٫۹ انچ اکائیاں

∴ گ‌لا = $\sqrt{\frac{۹۶۳٫۹}{۴۰٫۵۹۲}}$ = ۴٫۹۰ انچ

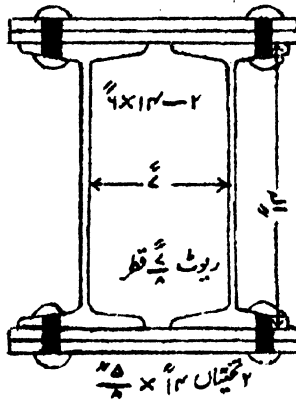
ماما کے گرد معیارِ جمود :—

چار ۱۲ × ½ انچ کی تختیوں کا مرکزِ ہندسی کے گرد = $\frac{(۱۲)^۳ × ½ × ۴}{۱۲}$ = ۲۸۸٫۰

۲ نالیاں مرکزِ ہندسی کے گرد = ۸٫۱۹۴ × ۲ = ۱۶٫۴

دونوں نالیوں کے ب × فا = ۲ × ۸۶۲۹۹ × (۳۶۱۸۳)^۲ = ۱۶۸۶۵
مجموعہ = ۴۷۲۶۹

∴ گ_ما = √(۴۷۲۶۹ / ۴۰۶۵۹۲) = ۳۶۴۱ انچ

(۶) شہتیر کی ساختہ تراش ـــــ ۱۴ انچ × ۶ انچ × ۴۶ پونڈ کے دو I شہتیروں اور ۱۴ انچ × ۵/۸ انچ کی چار تختیوں سے بنی ہوئی (شکل ۳۷)۔ آ/ لا مطلوب ہے۔

شکل ۳۷

معیاری تراشوں کی جدولوں سے I شہتیروں کے لیے یہ مواد حاصل ہوتا ہے:—

ہر ایک کا رقبہ = ۱۳۶۵۳
" آ/لا = ۴۴۰۶۵

ہر ایک کور کی اوسط موٹائی = ۶۶۹۸ انچ

پوری تراش کا آ~لالا~ (ریوٹوں سے قطع نظر کر کے)۔

آ~لالا~ دو I شہتیروں کا = ۲ × ۴۴۰ء۵ = ۸۸۱

آ دو جوڑ تختیوں کا مرکزِ ہندسی کے گرد = (۱۴×۲)/۱۲ × (۵/۴)^۳ = ۴ء۸

ب × ف^۲ دو جوڑ تختیوں کے لیے = ۴ × ۱۴ × ۵/۸ × (۷ء۶۲۵)^۲ = **۲۰۳۵**

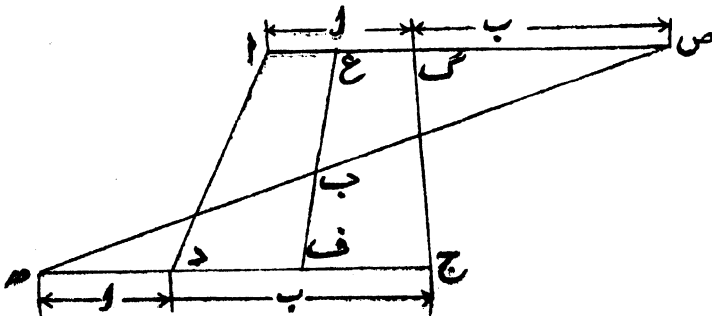
مجموعہ .... = ۲۹۲۰ء۸

ریوٹوں کا لحاظ (ریوٹ کا آ اِس کے مرکزِ ہندسی کے گرد نظر انداز کرتے ہوئے)۔

ہر ایک سوراخ کا رقبہ = (۲ × ۵/۸ + ۰ء۶۹۸) × ۷/۸ = ۱ء۷۰۴

مرکزِ ہندسی کا فاصلہ لا لا سے = ۷ء۲۷۶

∴ ریوٹوں کا آ~لالا~ = ۴ × ۱ء۷۰۴ × (۷ء۲۷۶)^۲ = ۳۶۰ء۸

∴ خالص آ~لالا~ = ۲۹۲۰ء۸ − ۳۶۰ء۸ = **۲۵۶۰**

شکل ۳۸ ـ منحرف کا مرکزِ ہندسی

(۷) ساختہ تراشیں — تقریبی طریقہ — ساختہ تراشوں کے معیارِ جمود کو تقریبی طور پر اس طرح معلوم کیا جا سکتا ہے کہ I شہتیروں یا نالیوں کے معیارِ جمود میں تختیوں کے ب × ف² میں جمع کیا جائے جس میں ب کے لیے تختیوں کا خالص رقبہ لیا جائے اور ف تختیوں کے ایک سٹ کے مرکز کا فاصلہ لالا سے ہے۔

گزشتہ مثال ہی کی تراش پر اِس طریقے کا استعمال کریں تو آ_لالا حسبِ ذیل حاصل ہوگا:۔

آ_لالا دو I شہتیروں کا = ۲ × ۴۴۰٫۵ = ۸۸۱

ب × ف² تختیوں کا = ۴ × $\frac{۵}{۸}$ (۱۴ − ۲ × $\frac{۷}{۸}$) × (۷٫۶۲۵)² = <u>۱۷۸۱</u>

مجموعی آ_لالا کی تقریبی قیمت = <u>۲۶۶۲</u> انچ اکائیاں

منحرف کے مرکزِ ہندسی کے لیے ساخت — منحرف کا مرکزِ ہندسی معلوم کرنے کے لیے ذیل کا ترسیمی عمل چنائی کی تعمیروں میں کارآمد ثابت ہوگا۔

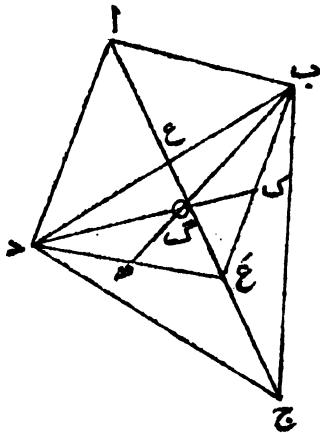
فرض کرو کہ ا د ج گ ایک منحرف ہے (شکل ۳۸) متوازی اضلاع ا گ اور ج د کی تنصیف ع اور ف پر کرو اور ع ف کو ملاؤ۔

ا گ کو ص تک خارج کر کے گ ص کو د ج کے طول ب کے مساوی بناؤ اور ج د کو ہ تک خارج کر کے د ہ کو ا گ کے طول ا کے مساوی بناؤ۔

ہ ص کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ ع ف کو ب پر قطع کرتا ہے۔
تب ب منحرف کا مطلوبہ مرکزِ ہندسی ہوگا۔

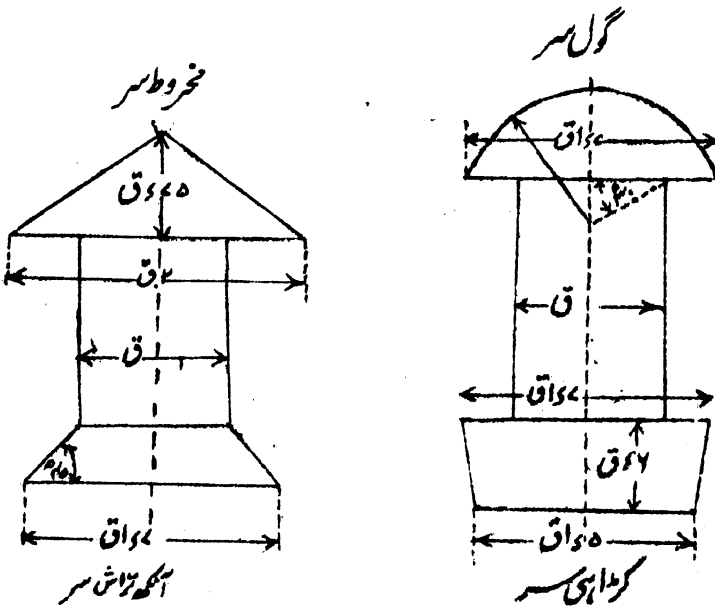
ذوالاربعۃ الاضلاع کے مرکزِ ہندسی کے لیے ساخت —

فرض کرو کہ کسی ذوارب‌عۃ الاضلاع کے وتروں ا ج اور ب د کا نقطۂ تقاطع ع ہے (شکل ۳۹)۔ ج سے ج ا پر ج عَ مساوی ا ع کے بناؤ اور د عَ اور ب عَ کو ملاؤ۔ تب ذوارب‌عۃ الاضلاع کا مرکزِ ہندسی وہی ہوگا جو مثلث ب عَ د کا ہے۔

∴ ب عَ اور عَ د کی تنصیف ک اور ھ پر کرو اور د ک اور ب ھ کو ملاؤ۔ تب ان کا نقطۂ تقاطع گ مطلوبہ مرکزِ جاذبہ ہوگا۔

شکل ۳۹۔ ذوارب‌عۃ الاضلاع کا مرکزِ ہندسی

چوتھا باب

ریوٹ دار جوڑ اور رابطے

ریوٹوں کے سروں کی شکلیں ــــــــ ریوٹوں کے سروں کی سب میں زیادہ کثیر الاستعمال شکلیں اور ان کے معمولی تناسب اشکال نمبر ۱۴۰، ۱۴۱ میں دکھائے گئے ہیں۔

شکل ۱۴۰ و ۱۴۱ ۔ ریوٹوں کے سروں کی شکلیں

تعمیری کاموں میں گول سروالے (Snap headed) ریوٹ سب میں زیادہ استعمال ہوتے ہیں لیکن جہاں ضروری ہو وہاں تختی کی سطح سے ابھار کو روکنے کے لیے آنکھ تراشے ریوٹ (Countersunk rivets) بھی استعمال ہوتے ہیں۔ گول سروں میں ریوٹ کا طول قطر کا تقریباً $1\frac{1}{4}$ گنا ہوتا ہے۔

عملاً دستور یہ ہے کہ سرد حالت میں ریوٹ کا قطر سوراخ کے قطر سے $\frac{1}{16}$ انچ کے بقدر کم ہو لیکن حسابات میں عموماً ریوٹ کا قطر وہی لیا جاتا ہے جو سوراخ کا ہوتا ہے۔

ریوٹوں کا قطر ــــ اَنوِن (Unwin) کا ضابطہ یہ ہے کہ ریوٹ کا قطر = ۱٫۲ $\sqrt{م}$ جہاں م سب میں پتلی تختی کی موٹائی ہے لیکن تعمیری کاموں میں یہ قاعدہ بہت کم اختیار کیا جاتا ہے۔ عملاً جہاں کہیں ممکن ہو $\frac{3}{4}$ یا $\frac{7}{8}$ کا ریوٹ استعمال کیا جاتا ہے اور بہتر یہی ہے کہ کسی ضابطے سے قطر کو تختی کی موٹائی کی رقوم میں حاصل نہ کیا جائے۔ بعض ماہرین $\frac{3}{8}$ والی تختی کے لیے $\frac{3}{4}$ کا ریوٹ $\frac{1}{2}$ والی کے لیے $\frac{7}{8}$، اور $\frac{5}{8}$ کے لیے ۱ استعمال کرتے ہیں۔ ۱ انچ سے بڑے قطر کے ریوٹوں کو ہاتھ سے ٹھونکنا مشکل ہے۔

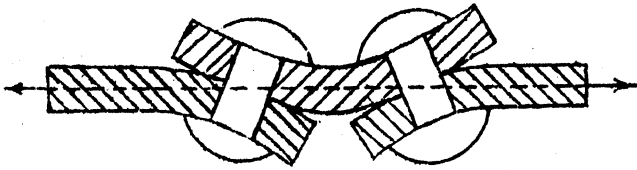
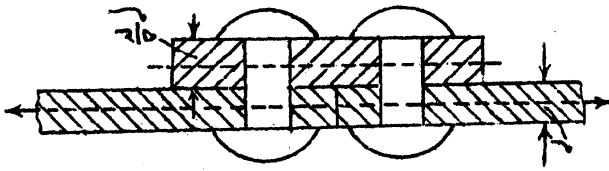
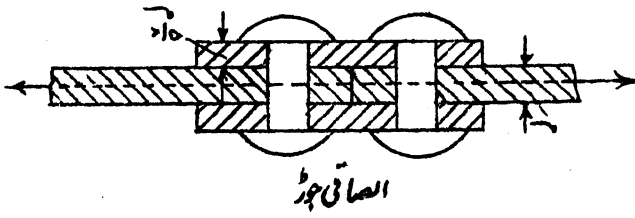
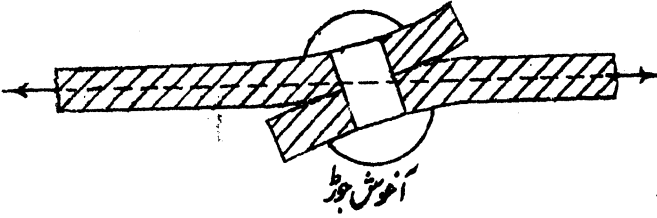
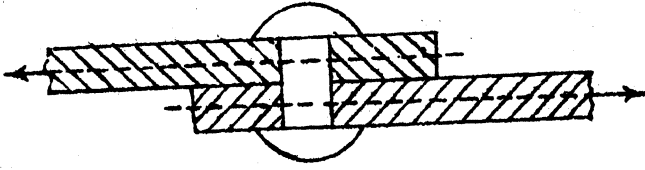
جوڑوں کی قسمیں ــــ (۱) آغوش جوڑ اور الصاقی جوڑ ــــ آغوش جوڑ میں تختیاں ایک دوسری پر چڑھ جاتی ہیں جیسا کہ شکل ۴۲ میں دکھایا گیا ہے۔ جوڑ کی اس قسم میں نقص یہ ہے کہ کھینچ کا خط ایسا ہوگا کہ اس سے خماؤ کے زور پیدا ہونگے جن کا اقتضا جوڑ کی شکل بگاڑ دینے کا ہوگا جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔

الصاقی جوڑ میں تختیوں کے کنارے آکر بھڑ جاتے ہیں اور ان کے اوپر اور نیچے ڈھکن تختیاں لگائی جاتی ہیں جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔ ڈھکن تختی کی موٹائی اصلی تختیوں کی $\frac{5}{8}$ ہوتی ہے۔ جوڑ کی اس قسم میں کھینچ مرکزی ہوتی ہے اور اس طرح خماؤ کے زور نہیں پیدا ہوتے۔

واحد ڈھکن تختی کے جوڑ ہیں جو کہ آغوش جوڑ اور الصاقی جوڑ کی ایک آمیزش ہے خماؤ کے زور پیدا ہوتے ہیں جو جوڑ کی شکل بگاڑنے کا اقتضا رکھتے ہیں جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔
اوپر کے بیان سے ظاہر ہے کہ جہاں کہیں ممکن ہو الصاقی جوڑ اختیار کرنا چاہیے۔

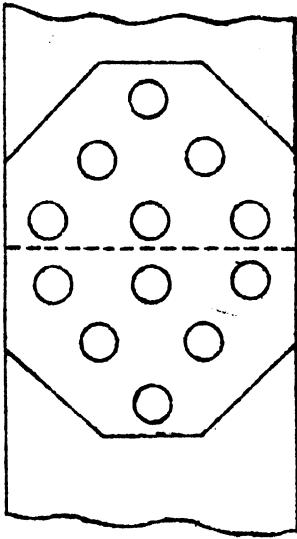
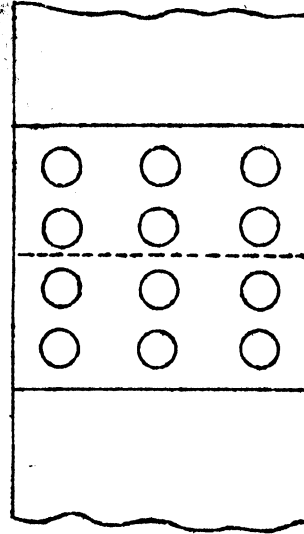
(ب) زنجیلوی ریوٹ کاری اور زگ زیگ یا لہریا ریوٹ کاری
جوڑیں ریوٹوں کی مختلف قطاروں کو زنجیری (Chain) شکل میں یا لہریا (Zigzag) شکل میں ترتیب دیا جاسکتا ہے جیسا کہ اشکال ۴۳ و ۴۴ میں دکھایا گیا ہے جیسا کہ ہم آگے چل کر دکھائیں گے۔ لہریا قسم زیادہ باکفایت ہوتی ہے اور جہاں کہیں ممکن ہو یہی استعمال کی جائے۔

ریوٹ دار جوڑ کی ناکارگی کے طور

ریوٹ دار جوڑ ذیل کے اطوار میں سے کسی ایک طور پر ناکارہ ہو سکتا ہے:۔
(۱) تختی کے پھٹ جانے سے۔
(۲) ریوٹوں کے کترے جانے سے۔
(۳) ریوٹوں کے کچلے جانے سے۔
(۴) تختی کے کنارے کے چر جانے سے۔
(۵) تختی کے کترے جانے سے۔
شکل ۴۵ میں ناکارگی کے ان اطوار کو دکھایا گیا ہے۔
(۴) اور (۵) کی رعایت ذیل کے قاعدے سے رکھی جاتی ہے:۔
ریوٹ کے مرکز سے تختی کے کنارے تک اقل فاصلہ $\frac{3}{2}$ ق رکھا جاتا ہے جہاں ق ریوٹ کا قطر ہے۔
اگر اس قاعدے کی پابندی کی جائے تو جوڑ کی ناکارگی ہمیشہ (۱)، (۲)، (۳) میں سے کسی ایک طور پر ہوگی۔
کسی جوڑ کی تجویز میں مد نظر یہ امر رہنا چاہیے کہ ناکارگی کے مختلف

شکل ۴۲ - ریوٹ دار جوڑوں کی قسمیں

اطوار میں سے ہر ایک طور کے لیے مساوی قوت درکار ہو۔

اب ہم ناکارگی کے مختلف اطوار پر تفصیل کے ساتھ غور کرینگے۔ ہر صورت میں تختی کی ایک پٹی پر غور کیا جائیگا جس کا عرض ریوٹوں کی گھائی کے مساوی ہو۔

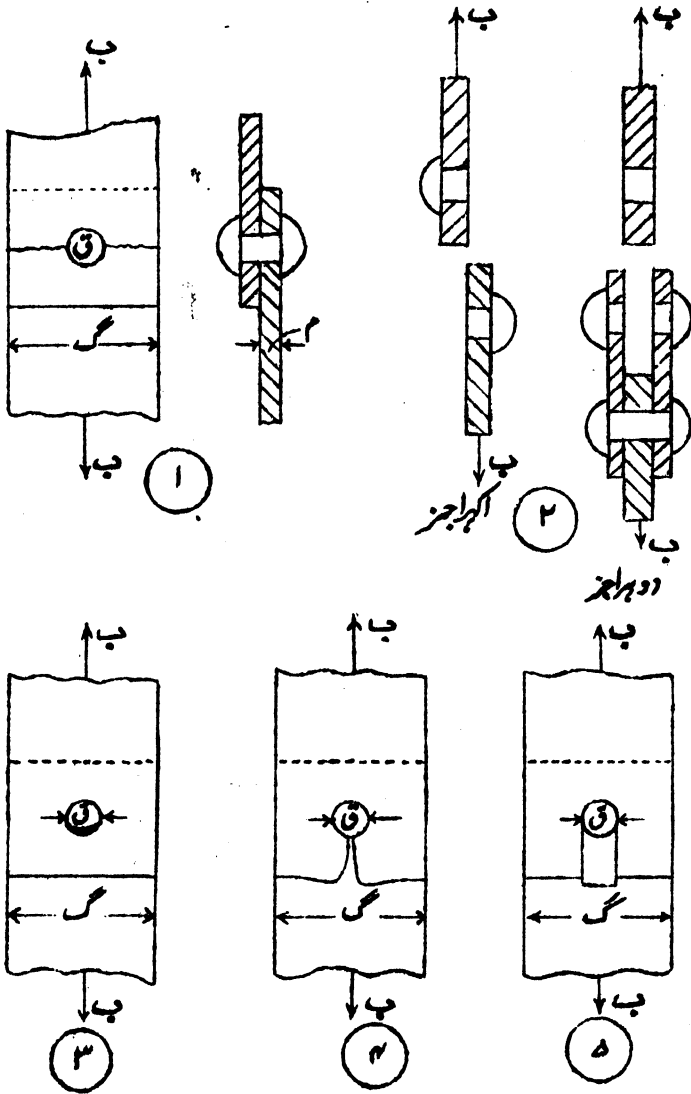
(۱) تختی کا پھٹاؤ ـــــ اِس صورت میں عرض جس پر ناکارگی واقع ہوگی (گ - ق) ہوگا' اور چونکہ تختی کی موٹائی م ہے اِس لیے شکستگی کا رقبہ = (گ - ق) م

شکل ۴۴ - کج مج یا لہر یا ریوٹ کاری

شکل ۴۳ - زنجیری ریوٹ کاری

اس لیے اگر زت مادے کا بے خطر تنشی زور ہو تو بے خطر بوجھ جو جوڑ برداشت کر سکیگا' یہ ہوگا :-

ب = زت (گ - ق) م ....(۱)

(۲) ریوٹوں کا کترا جانا۔

اکہرے جز کی صورت میں' کترا ہوا رقبہ = $\frac{\pi}{4}$ ق۲

دوہرے " " " " = $\frac{2\pi}{4}$ ق۲

شکل ۴۵

[نوٹ۔ مجلسِ تجارت کا ایک قانون یہ ہے کہ دوہرے جز میں رقبہ $۱٫۷۵ \frac{\pi ق^{۲}}{۴}$ لیا جائے لیکن تعمیری کاموں میں اس قانون کی ہر جگہ پابندی نہیں کی جاتی]۔

اِس لیے اگر ریوٹ کے مادّے کے لیے بے خطر جزی زور زج ہو تو ریوٹ کے جز کے لحاظ سے جوڑ پر بے خطر قوت اکہرے اور دوہرے جز کے لیے یہ ہوگی:—

$$\left.\begin{array}{l} ب = زج \times \frac{\pi ق^{۲}}{۴} \\ ب = زج \times \frac{۲ \pi ق^{۲}}{۴} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (۲)$$

(۳) ریوٹوں کا کچلا جانا۔ اِس صورت میں کچلا جانے والا رقبہ (جس کو مسندی رقبہ بھی کہتے ہیں) ریوٹ کے قطر ضرب تختی کی موٹائی کے مساوی لیا جائے یعنی ق × م۔ اِس لیے اگر ریوٹ کے مادّے پر بے خطر مسندی زور زم ہو تو مسند کے لحاظ سے جوڑ پر بے خطر قوت یہ ہوگی:—

$$ب = زم \times ق \times م \quad \cdots\cdots\cdots (۳)$$

زت اور زج کی قیمتیں وہ لی جاسکتی ہیں جو باب ۲ میں دی گئی ہیں۔

زم کی قیمت نرم فولاد کے لیے ۱۰ ٹن فی مربع انچ اور پٹواں لوہے کے لیے ۸ ٹن فی مربع انچ لی جاسکتی ہے۔ یہ مقداریں معمولی فشار سے زیادہ ہیں اور تجربات کے ذریعے حاصل کی گئی ہیں۔

تعمیری کاموں میں جوڑ کی مضبوطی مسند میں جز سے اکثر کم ہوگی کیونکہ تختیوں کی موٹائی ریوٹ کے قطر سے عموماً کم ہوتی ہے۔

جوڑ کی استعداد—جوڑ کی استعداد وہ نسبت فیصدی ہے جو جوڑ کی اقل مضبوطی کو ٹھوس جوڑ کی مضبوطی سے ہو یعنی

استعداد = ع = $\frac{\text{جوڑ کی اقل مضبوطی}}{\text{ٹھوس تختی کی مضبوطی}}$

عددی مثالیں۔ ذیل کی عددی مثالوں سے ریوٹ دار جوڑوں کے حسابات واضح ہو جائینگے:۔

(۱) ایک پل میں ایک بند ھن سلاخ ایک چپٹی فولادی سلاخ کی ہے جس کی چوڑائی ۹ انچ اور موٹائی ۱¼ انچ ہے۔ اس میں ایک دو ھوا الصاقی جوڑ لگانا ہے۔ ریوٹوں کا قطر اور ان کی تعداد حاصل کرو اور خاکہ بناؤ جن سے ریوٹوں کی مناسب گھائی اور ترتیب معلوم ہو۔ (بی۔ ایس سی۔ لنڈن)

انون[۱] کے ضابطے سے ق = ۱٫۲ √م = ۱٫۳۴ انچ۔ لیکن عملاً یہ بہت زیادہ ہے اس لیے ق = ۱ انچ لو۔

فرض کرو کہ ریوٹ لہریا طور پر ترتیب دیے گئے ہیں۔ تب جوڑوں کی مضبوطی بیرونی ریوٹ کے سوراخ میں سے پھٹ جانے کے لحاظ سے ۷ (۹ - ۱) × ۵/۴ = ۷۰ ٹن ہوگی۔

ایک ریوٹ کی جزی مضبوطی = ۵ × ۲π/۴ × (۱)² = ۷٫۸۵ ٹن

∴ جز کے لیے ریوٹوں کی مطلوبہ تعداد = ۷۰/۷٫۸۵ = ۸٫۹۳ = ۹ فرض کرو۔

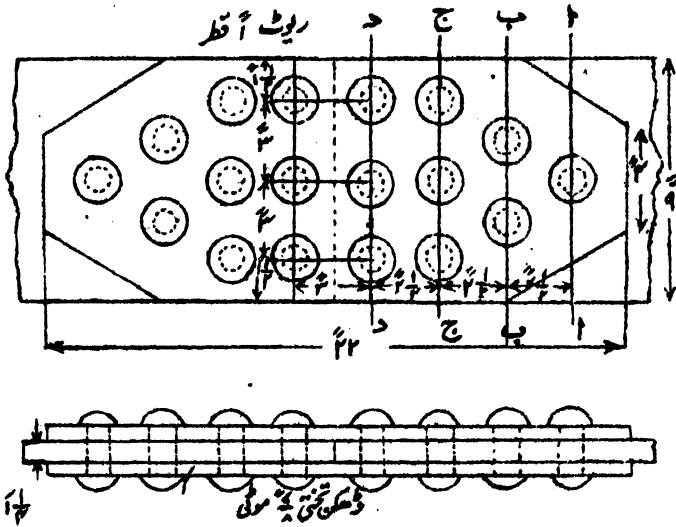
ایک ریوٹ کی مسندی مضبوطی = ۱۰ × ۱ × ۵/۴ = ۱۲٫۵ ٹن

∴ مسند کے لیے ریوٹوں کی مطلوبہ تعداد = ۷۰/۱۲٫۵ = ۶ فرض کرو

∴ ۹ ریوٹ مسند کے لیے بہت کافی ہونگے۔

اس طرح جوڑ شکل ۴۶ کی طرح ترتیب دیا جائیگا۔ مرکزی دو قطاریں

[۱] Unwin

زنجیری شکل میں (Chain-riveted) ہونگی۔

شکل ۴۶

اب ہم اِس جوڑ کی مضبوطی ناکارگی کے مختلف اطوار کے لحاظ سے دیکھینگے۔

اگر تختی خط ا ا پر پھٹے تو اس کے لیے زور کی بے خطر حد جیسا کہ ہم دکھا چکے ہیں ۷۰ ٹن ہوگی۔

اب فرض کرو کہ تختی ب ب پر پھٹتی ہے اور ا ا کا رِیوٹ کترا جاتا ہے۔

خط ب ب کی مضبوطی $= 7 \times (9-2) \times \frac{5}{4} = 61.25$ ٹن

اور ایک رِیوٹ کی مضبوطی $= 7.85$ ٹن

∴ ب ب پر ناکارگی کے خلاف مجموعی مضبوطی $= 61.25 + 7.85 = 69.10$ ٹن

اب فرض کرو کہ تختی ج ج پر پھٹتی ہے اور باہر کے تین رِیوٹ کترے جاتے ہیں۔

خط ج ج کی مضبوطی $= 7 \times (9-3) \times \frac{5}{4} = 52.5$ ٹن

تین رِیوٹوں کی مضبوطی $= 23.55$ ٹن

∴ ج ج پر ناکارگی کی مزاحمت $= 52.5 + 23.55 = 76.05$ ٹن

اب فرض کرو کہ ڈھکن تختیاں د د پر پھٹتی ہیں۔

یہ مضبوطی = ۷ × (۹-۳) × ۲ × ۷/۸ = ۷۳٫۵ ٹن

اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ سب میں کم زور تراش ب ب ہے۔

∴ جوڑ کی استعداد = جوڑ کی اقل مضبوطی / ٹھوس تختی کی مضبوطی

= ۶۹٫۱ / (۷ × ۵/۴ × ۹) = ۶۹٫۱ / ۷۸٫۸ = ۸۷٫۸ فیصد

اگر لہریا ریوٹ کاری کی بجائے زنجیری رِیوسٹ کاری اختیار کرتے جس میں تین تین ریوٹوں کی تین قطاریں رکھتے (اِس طرح کُل ریوٹ ۹ ہوتے) تو اقل مضبوطی (۹-۳) × ۵/۴ × ۷ = ۵۲٫۵ ٹن ہوتی اور

جوڑ کی استعداد = ۵۲٫۵ / ۷۸٫۸ = ۶۶٫۷ فی صد

اگر زنجیری ریوٹ کاری کے دو دو ریوٹوں کی چار قطاریں ہوتیں (اس طرح کُل ۸) تو اقل مضبوطی (۹-۲) × ۵/۴ × ۷ = ۶۱٫۲۵ ٹن ہوتی اور

جوڑ کی استعداد = ۶۱٫۲۵ / ۷۸٫۸ = ۷۷٫۷ فی صد

اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ لہریا ریوٹ کاری زنجیری ریوٹ کاری سے زیادہ بااستعداد اور اس طرح زیادہ باکفایت ہوتی ہے۔

(۲) ایک دو قطاری آغوش جوڑ دو ۱/۲ انچ موٹی فولادی تختیوں کو فولادی رِیوٹوں سے جوڑنے کے لیے تجویز کرو۔ تختیوں کی تنشی مضبوطی سوراخ کرنے سے پہلے ۳۰ ٹن فی مربع انچ، ریوٹوں کی جزی مضبوطی ۲۴ ٹن فی مربع انچ، اور فولاد کی فشاری مضبوطی ۴۳ ٹن فی مربع انچ ہے۔ جوڑ کی استعداد معلوم کرو۔

(اے۔ ایم۔ آئی۔ سی۔ اِی)

$\frac{1}{2}$ انچ کی تختی کے لیے اَنوِن کے ضابطے سے

ق = ۱٫۲ $\sqrt{\text{۰٫۵}}$ = ۰٫۸۵ انچ یا $\frac{7}{8}$ انچ لو

جوڑ دو قطاری آغوش جوڑ ہے اس لیے گھائی کے مساوی عرض میں دو ریوٹ اکہرے جتر میں ہونگے۔

∴ پھٹنے کے خلاف مضبوطی فی گھائی = نپ (گ ۔ ق) م

= ۳۰ (گ ۔ ق) × $\frac{1}{2}$ = ۱۵ (گ ۔ ق) ...... (۱)

∴ کترے جانے کے خلاف مضبوطی فی گھائی = نج $\frac{\pi ۲ ق^۲}{۴}$

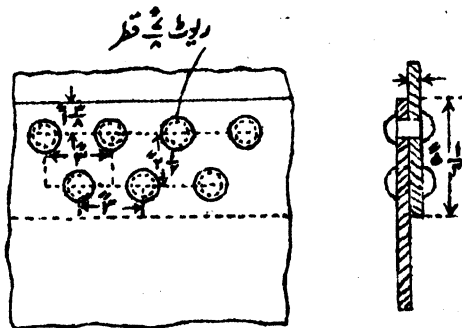
= ۲۴ × $\frac{\pi ۲}{۴}$ × $(\frac{7}{8})^۲$ .... (۲)

= ۲۸٫۹ ٹن

اگر یہ مساوی ہوں تو ۱۵ (گ ۔ $\frac{7}{8}$) = ۲۸٫۹

∴ گ = $\frac{۲۸٫۹}{۱۵}$ + $\frac{7}{8}$

= ۱٫۹۳ + ۰٫۸۷ = ۲٫۸۰ یا کہو ۳ انچ

شکل ۴۷

۲۸٫۹ ٹن کی قوت سے مسندی زور یہ ہوگا:—

$\frac{۲۸٫۹}{۲ × \frac{1}{2} × \frac{7}{8}}$ = ۳۳ ٹن فی مربع انچ

کیونکہ ایک ریوٹ کا مسندی رقبہ = ۷/۸ × ۱/۲ = ۰ء۴۳۷ مربع انچ

یہ ۳۴ ٹن فی مربع انچ کے جائز زور سے کم ہے اس لیے معلوم ہوا کہ ریوٹ کا قطر اس سے بڑا لینے سے کفایت ہوگی لیکن عملاً اکثر صورتوں میں ۷/۸ انچ کا قطر زیادہ موزوں ہے۔

جوڑ کی استعداد اس صورت میں حسب ذیل ہوگی :-

$$\frac{۲۸ء۹}{\frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳۰} = \frac{۲۸ء۹}{۴۵} = ۶۴ء۲ \text{ فی صد}$$

جوڑ شکل ۷۴ کے مطابق ہوگا۔

(۳) ایک پُل کی فولادی تختی کی بندھن سلاخ پر صرف مُردہ بوجھ کی وجہ سے ۱۶ ٹن کا تناؤ پڑتا ہے اور زندہ بوجھ کی وجہ سے زور ۳۶ ٹن کے تناؤ سے ۱۰ ٹن کے فشار تک بدلتا ہے۔ بندھن سلاخ کی موٹائی ۳/۴ انچ ہے اور اس کو ایک گرڈر کی جانبی تختی سے ایک ۳/۴ انچ کلی تختی اور دوہرے ڈھکنے کے الصاقی جوڑ کے ذریعے جوڑنا ہے۔ موزوں کامی زور انتخاب کرو اور ریوٹوں کو اس طرح ترتیب دے کر کہ بندھن سلاخ صرف ایک ریوٹ کی تراش کے بقدر کم زور ہو جوڑ کو ترتیب دو۔ (بی۔ ایس سی۔ لندن)

اس صورت میں اعظم بوجھ = ۳۶ + ۱۶ = ۵۲ ٹن اور اقل بوجھ = ۱۶ - ۱۰ = ۶ ٹن

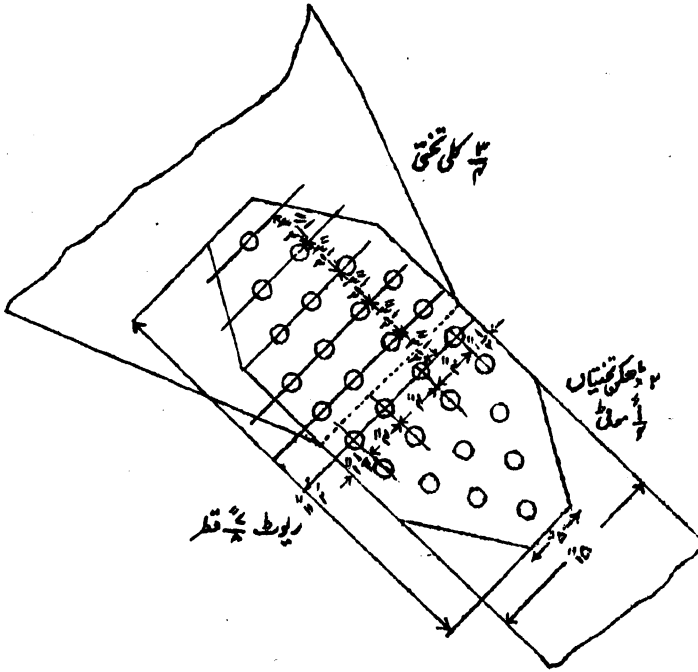
لون ہارڈٹ[1] ویراش کا ضابطہ استعمال کرنے سے :

---

[1] Launhardt-Weyrauch

$$کامی\ زور = \frac{ز}{۱٫۵}\left(۱ + \frac{اقل\ زور}{۲ \times اعظم\ زور}\right)$$

$$= \frac{ز}{۱٫۵}\left(۱ + \frac{۶}{۱۰٫۴}\right) = ۱٫۰۵\ ز$$

شکل ۴۸

اِس سے تنشی زور ۴٫۹۳ یا کہو ۵ ٹن فی مربع انچ جزی زور ۳٫۵۲ یا کہو ۳٫۵ ٹن فی مربع انچ، اور مسندی زور ۷ ٹن فی مربع انچ حاصل ہوتا ہے۔ اَونِن کے ضابطے سے ق = ۱٫۲ √۰٫۷۵ = ۱٫۰۴ انچ لیکن عملی وجوہ سے عموماً ۷/۸ انچ اختیار کیا جائیگا۔

اب ہم کو بندھن سلاخ کا ضروری عرض معلوم کرنا ہے۔ فرض کرو کہ یہ ض ہے۔

تب (ض - $\frac{۷}{۸}$) × $\frac{۳}{۴}$ معادل تراشی رقبہ ہوگا۔

∴ (ض - $\frac{۷}{۸}$) × $\frac{۳}{۴}$ × ۵ کو ۵۲ ٹن کے اعظم تناؤ کے مساوی ہونا چاہیے۔

∴ (ض - $\frac{۷}{۸}$) = $\frac{۴ \times ۵۲}{۵ \times ۳}$ = ۱۳٫۸۹

∴ ض = ۱۳٫۸۹ + ۸۷۵٫ = ۱۴٫۷۶۵ = کہو ۱۵ انچ

ایک ریویٹ کی مضبوطی دوہرے جز میں

= $\frac{۲ \pi}{۴}$ × ($\frac{۷}{۸}$)^۲ × ۵٫۵ = ۲۲٫۴ ٹن

∴ جز کے لیے ریوٹوں کی مطلوبہ تعداد = $\frac{۵۲}{۲۲٫۴}$ = ۲٫۳۲

ہم ۴ ریوٹ استعمال کرینگے کیونکہ اِن سے بہترین ترتیب حاصل ہوتی ہے۔

مسند میں ایک ریوٹ کی مضبوطی = $\frac{۳}{۴}$ × $\frac{۷}{۸}$ × ۷ = ۴٫۵۸ ٹن

∴ ۴ ریوٹ مسند کے لیے بہت کافی ہونگے۔

اِس طرح جوڑ شکل ۸۰ کی طرح ترتیب دیا جائیگا۔ اِس طرح کے جوڑوں میں اِس کی بہت اہمیت ہے کہ ریوٹوں کا خطِ مرکز بندھن سلاخ کے مرکزی خط پر منطبق ہونا چاہیے ورنہ سلاخ میں کھینچ خارج المرکز ہوگی۔ اِس لیے اس قسم کے جوڑوں میں ریوٹوں کو ہمیشہ بندھن سلاخ کے مرکزی خط کے لحاظ سے متشاکل ترتیب دینا چاہیے۔

(۴) ایک فولادی کھم کے قاعدے پر کھم کی لگی ہوئی کلی تختیوں وغیرہ کے لیے ریوٹوں کی ضرورری تعداد معلوم کرو۔ کھم پر بوجھ ۱۵۰ ٹن کا پڑتا ہے۔ ریوٹوں کا قطر $\frac{۷}{۸}$ انچ ہے اور

تختی کی موٹائی $\frac{1}{2}$ انچ ہے۔

یہاں جس قسم کے قاعدے کا ذکر کیا گیا ہے وہ شکل ۲۱۵ب میں دکھایا گیا ہے۔ ایسی صورتوں میں ریوٹوں کو اس طرح تجویز کرنا ہوتا ہے کہ وہ پورا بوجھ برداشت کر سکیں [اگر کلی تختیاں اور زاویے لگے ہوئے کھم کے سرے کو رندہ کر دیا گیا ہو تو عموماً اس کو کافی سمجھا جاتا ہے کہ ریوٹوں کو صرف ۶۰ فیصدی بوجھ کے لیے تجویز کیا جائے] تاکہ اگر قاعدے کی تختی پر کھم خود ٹھیک ٹھیک نہ بیٹھے تو ریوٹ بوجھ کو عمدگی کے ساتھ منتقل کر سکیں۔

ایک ریوٹ کی مضبوطی اکہرے جز میں $= \frac{\pi}{4} \times \left(\frac{7}{8}\right)^2 \times 5 = 3.01$ ٹن

" " " مسند میں $= \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} \times 10 = 4.37$ ٹن

∴ ریوٹوں کی ضروری تعداد $= \frac{150}{3.01} = 50$ تقریباً

ریوٹ دار جوڑوں کے متعلق چند عملی امور

ریوٹوں کے سوراخ چھیدنا اور برمانا۔ اس ملک (یعنی انگلستان) میں تخصیص ناموں میں یہ لکھنے کا طریقہ بہت عام ہے کہ ریوٹوں کے سوراخ ٹھوس تختی میں برمائے جائیں۔ چھیدنے کا عمل سوراخ کے نواح میں تختی کے مادے کو کسی قدر نقصان پہنچاتا ہوا پایا گیا ہے اس لیے عموماً اس سے منع کیا جاتا ہے۔ برمائے ہوئے سوراخوں کے مقابلے میں چھیدے ہوئے سوراخ کسی تعمیر مثلاً ایک تختی دار گرڈر کو کس حد تک کم زور کرتے ہیں اس امر کی غالباً پوری تحقیق نہیں ہوئی حالانکہ عملی نقطۂ نظر سے یہ بالکل ضروری ہے کیونکہ سوراخ برمانے میں لاگت زیادہ آتی ہے۔ حال میں سُنبی مشینوں میں اور سوراخوں کو صحیح گھائی پر بنانے کے ذرائع میں بہت کچھ اصلاح ہوئی ہے اور اگر برمانے کی لاگت کا اور اس کی وجہ سے مال کی تیاری میں جو تاخیر واقع ہوتی ہے اس کا لحاظ رکھا جائے تو ہمارا خیال ہے کہ اکثر صورتوں میں چھیدنا جائز رکھا جا سکتا ہے۔ اس مسئلے کا ایک عمدہ حل یہ ہوگا کہ سوراخوں کو مطلوبہ قطر سے $\frac{1}{16}$ تا $\frac{1}{8}$ انچ چھوٹا چھیدا جائے اور پھر اس کو مطلوبہ

قطر تک روزن کُشا کیا جائے۔

اور اس ترشی ہوئی دھات کو نکال دیا جائے۔ لیکن اس میں معمولی چھیدنے کے عمل سے زیادہ لاگت آتی ہے۔ چھیدنے کے عمل سے سوراخ کے نواح میں جو کمزوری پیدا ہوتی ہے اُس کی رعایت کا ایک طریقہ جسے ہم قابلِ ترجیح سمجھتے ہیں یہ ہے کہ تختی کے پھٹاؤ یا تنشی مضبوطی کا حساب کرتے وقت سوراخ کے قطر میں $\frac{1}{8}$ انچ جمع کیا جائے۔ اس سے تختی کی جسامت میں بہت خفیف اضافہ ہوتا ہے اور تیاری کی لاگت میں بہت کفایت ہوتی ہے۔ البتہ اس کا خیال بہت احتیاط کے ساتھ رکھنا چاہیے کہ سوراخوں کی گھائی صحیح ہو تاکہ جب اجزا جوڑے جائیں تو سوراخ سے سوراخ اچھی طرح مل جائیں اور بہت زیادہ ترمیم کی ضرورت نہ ہو۔ اکثر جوڑوں کے ناقابلِ اطمینان ہونے کی وجہ چھیدنے کے عمل سے دھات کے کمزور ہونے سے زیادہ یہ ہوتی ہے کہ سوراخوں کے ٹھیک ٹھیک متطابق نہ ہونے کی وجہ سے ریوٹ سوراخوں کو پورا بھر نہیں دیتے۔

ریوٹ دار جوڑوں میں تختیوں کے درمیان خاصی رگڑ ہوتی ہے لیکن مضبوطی کے حسابات میں اس سے فائدہ نہیں اٹھایا جاتا۔

ریوٹوں کی گھائی اور فصل بندی ——— عام طور پر یہ قید لگا دی جاتی ہے کہ ریوٹوں کی گھائی ۶ انچ سے یا سب میں پتلی تختی کی موٹائی کے ۱۶ گنے سے زیادہ نہ ہو اور اس سے غرض یہ ہے کہ تختیوں کے بیچ میں رطوبت داخل ہو کر اور زنگ پیدا کر کے تختیوں کو پھلا نہ دے اور یہ کہ فشاری ارکان کی صورت میں مقامی خمیدگی نہ پیدا ہو۔ مجوز کو یہ یاد رہے کہ گھائی ۳ انچ یا اس سے بقدر نصف انچ کے اضعاف کے زیادہ ہونی چاہیے۔ کسروں سے احتراز کیا جا سوائے اُس صورت کے کہ یہ بالکل ضروری ہوں۔ جہاں تک کفایت اجازت دے ایک تعمیر میں ایک ہی گھائی اختیار کرنی چاہیے اور اکثر صورتوں میں گرڈروں وغیرہ کے کاموں میں ۴ انچ کی گھائی استعمال کرنی چاہیے سوائے اُن صورتوں کے جن میں خصوصی حالات کی وجہ سے کوئی دوسری گھائی رکھنا پڑے۔ تختی دار

گرڈروں کے ریوٹوں کی ترتیب سے ہم مفصل بحث باب ۱۸ میں کرینگے کیونکہ اِس صورت میں ریوٹ بالکل ان ہی طریقوں کے مطابق نہیں تجویز کیے جاتے جو کہ یہاں درج کیے گئے ہیں۔

شکل ۴۹

بیلی تراشوں میں ریوٹوں کی معیاری فصل بندی

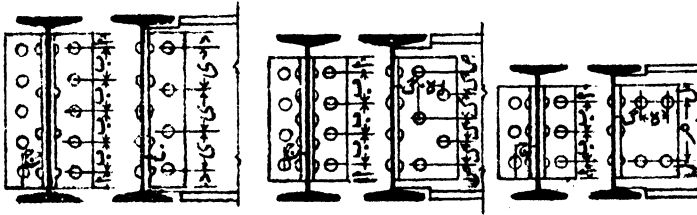
ا، T اور ایسی ہی دوسری تراشوں میں ریوٹوں کی فصل بندی اِس کے ساتھ کی جدول کے مطابق رکھی جا سکتی ہے۔ یہ جدول ریڈ پاتھ[۱]، براؤن اینڈ کمپنی لیمیٹڈ[۲] کی تراشوں کی کتاب سے لی گئی ہے۔ اِن تراشوں کے متعلق یہ یاد رکھنا چاہیے کہ نظریہ کی رُو سے ریوٹوں کا خط مرکزِ تراش کے مرکزی خط پر آنا چاہیے لیکن اکثر صورتوں میں یہ عملاً ناممکن ہے۔ جن صورتوں میں یہ تراشیں بندھن یا داب روک کے طور پر استعمال کی جائیں (خصوصاً داب روک) اُن میں یاد رہے کہ بوجھ کسی قدر خارج المرکز ہونگے اور اِس طرح محسوبہ تراش سے کسی قدر بھاری تراش درکار ہوگی۔

I شہتیروں کے لیے کلیٹی رابطے — I شہتیروں کو باہم کلیٹی رابطوں کے ذریعے جوڑا جاتا ہے۔ اِن رابطوں کے لیے معیاری ابعاد ساتھ کی جدول سے حاصل کیے جا سکتے ہیں جو کہ ریڈ پاتھ[۱]، براؤن اینڈ کمپنی لیمیٹڈ[۲] کی دی ہوئی اطلاعات سے لی گئی ہے۔

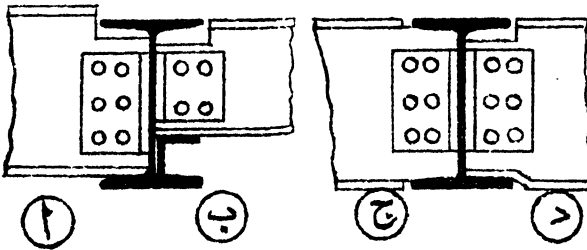
---

[۱] Redpath

[۲] Brown & Co., Ltd

شکل ۵۱ میں وہ مختلف طریقے دکھائے گئے ہیں جن سے شہتیروں کے سروں پر ان کیلیٹی رابطوں کے لیے کھٹنے وغیرہ بنائے جا سکتے ہیں۔ (ا) میں ایک سادہ کٹھنہ چوٹی پر ہے۔ شہتیر کی نچلی کور اس شہتیر کی کور پر ٹکی ہوئی ہے جس سے اس کو جوڑنا ہے۔ (ب) میں چوٹی پر ایک سادہ کٹھنہ اور نیچے ایک زاویہ سلاخ ہے۔ (ج) میں ایک شکل دار کٹھنہ ہر ایک سرے پر ہے جو کوروں پر ٹکا ہوا ہے اور (د) میں اوپر ایک سادہ کٹھنہ اور نیچے ایک دندانہ دار جوڑ ہے۔

شکل ۵۰۔ I شہتیروں کے لیے کیلیٹی رابطے

ان سب میں دندانہ دار سرا غیر ضروری طور پر گراں ہوتا ہے۔ بعض اوقات ربط کے آرائشی طریقے دیکھنے میں آتے ہیں مثلاً کٹھنے کی شکل ایسی بنانا کہ شہتیر (ج) کی کوروں کے درمیان ٹھیک بیٹھے۔ لیکن یہ طریقے عام طور پر معمولی طریقوں سے

شکل ۵۱

کچھ ایسے بہتر نہیں ثابت ہوتے اور تقریباً ہمیشہ اِن میں صرفہ زیادہ ہوتا ہے۔

کیل دار رابطے ـــــ کیل دار رابطے اِس ملک (یعنی انگلستان) میں آج کل بہت کم استعمال ہوتے ہیں لیکن کبھی کبھی یہ ضروری ہوتے ہیں۔ جب کبھی یہ استعمال کیے جاتے ہیں ان کو بڑی حد تک ریوٹ دار جوڑوں کی طرح ہی تجویز کیا جاتا ہے یعنی جوڑ کی مضبوطیاں پھٹاو، جز، اور مسند میں جہاں تک ممکن ہو باہم مساوی ہونی چاہییں اور اُس سلاخ کی تنشی یا فشاری مضبوطی کے مساوی ہونی چاہئیں جس میں کیل دار جوڑ واقع ہو۔ (نیز دیکھو باب ۱۷)۔

ریوٹوں کی معیاری فصل بندی (دیکھو شکل ۴۹)

عرض	ابعاد انچوں میں										ریوٹ یا بولٹ کا اعظم قطر (انچوں میں)	
	ا	ب	ج	د	ع	ف	گ	ہ	ل	م	ا تا ہ	ل تا م
۱ ۱/۴	۳/۴	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	۳/۸
۱ ۱/۲	۷/۸	-	-	-	-	-	-	-	۳/۴	۷/۸	۱/۴	۱/۲
۱ ۳/۴	۱	-	-	-	-	-	-	-	۷/۸	-	۱/۴	۱/۲
۲	۱ ۱/۸	-	-	-	-	-	۱ ۱/۸	۱ ۱/۸	۱ ۱/۸	۱ ۱/۸	۱/۴	۵/۸
۲ ۱/۴	۱ ۱/۴	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	۵/۸
۲ ۱/۲	۱ ۳/۸	-	-	-	-	-	۱ ۳/۸	۱ ۳/۸	۱ ۳/۸	۱ ۳/۸	۳/۸	۳/۴
۲ ۳/۴	۱ ۵/۸	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	۳/۴
۳	۱ ۳/۴	-	-	-	-	-	۱ ۱/۲	۱ ۳/۴	۱ ۱/۲	۱ ۳/۴	۱/۲	۷/۸
۳ ۱/۲	۲	-	-	-	-	-	-	-	۲	۲	۱/۲	۷/۸
۴	۲ ۱/۴	-	-	-	-	-	۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۵/۸	۷/۸
۴ ۱/۲	۲ ۱/۲	-	-	-	-	-	-	-	۲ ۱/۲	-	۳/۴	۷/۸
۵	۳	۲	۱ ۳/۴	-	-	-	۲ ۳/۴	-	۲ ۳/۴	-	۳/۴	-
۵ ۱/۲	۳ ۱/۴	۲ ۱/۴	۲	-	-	-	-	-	۳ ۱/۴	-	۳/۴	-
۶	۳ ۱/۲	۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	-	-	-	۳ ۱/۲	۳ ۱/۲	۳ ۱/۲	-	۷/۸	-
۶ ۱/۲	۳ ۳/۴	۲ ۱/۲	۲ ۱/۲	-	-	-	-	-	۳ ۳/۴	-	۷/۸	-
۷	۴	۲ ۱/۲	۳	-	-	-	-	-	۴	-	۷/۸	-
۷ ۱/۲	-	-	-	-	-	-	-	-	۴ ۱/۲	-	۷/۸	-
۸	۴ ۱/۲	۳	۳	۲ ۱/۲	۲	۲	-	-	۴ ۳/۴	-	۷/۸	-
۹	۵	۳	۴	۳	۲	۲	-	-	-	-	-	-
۱۰	۵ ۱/۲	۳	۵	۳	۲ ۱/۲	۲ ۱/۲	-	-	-	-	-	-

فولادی ریوٹوں کی کامی مضبوطی

ریوٹوں کا قطر انچوں میں	رقبہ مربع انچ	اکہرے جز میں مضبوطی ۵ ٹن فی مربع انچ سے	مستندی مضبوطی ۱۰ ٹن فی مربع انچ سے — تختی کی موٹائی انچوں میں							
			۵/۱۶	۳/۸	۷/۱۶	۱/۲	۹/۱۶	۵/۸	۱۱/۱۶	۳/۴
۳/۸	٫۱۱۰۴	٫۵۵	۱٫۱۷	۱٫۴۱	۱٫۶۴	۱٫۸۷	۲٫۱۱	۲٫۳۴	۲٫۵۹	۲٫۸۱
۱/۲	٫۱۹۶۳	٫۹۸	۱٫۵۶	۱٫۸۷	۲٫۱۸	۲٫۵۰	۲٫۸۱	۳٫۱۲	۳٫۴۳	۳٫۷۵
۵/۸	٫۳۰۶۸	۱٫۵۳	۱٫۹۵	۲٫۳۴	۲٫۷۲	۳٫۱۲	۳٫۵۱	۳٫۹۰	۴٫۳۰	۴٫۶۸
۳/۴	٫۴۴۱۸	۲٫۲۱	۲٫۳۴	۲٫۸۱	۳٫۲۷	۳٫۷۵	۴٫۲۱	۴٫۶۹	۵٫۱۶	۵٫۶۳
۷/۸	٫۶۰۳۱	۳٫۰۱	۲٫۷۲	۳٫۲۷	۳٫۸۲	۴٫۳۷	۴٫۹۱	۵٫۴۶	۶٫۰۲	۶٫۵۶
۱	٫۷۸۵۴	۳٫۹۳	۳٫۱۲	۳٫۷۵	۴٫۳۷	۵٫۰۰	۵٫۶۲	۶٫۲۵	۶٫۸۷	۷٫۵۰

I شہتیروں کے لیے کلیئی رابطے (دیکھو شکل ۵۰)

شہتیر (انچ)	زاویوں کا ناپ (انچ)	بولٹوں اور ریوٹوں کا قطر	زاویہ کا طول	کڑی میں ریوٹوں کی تعداد	ہر ایک نمایاں ٹانگ میں ریوٹوں کی تعداد	ابعاد (انچ) ا	ب	ج	د	ع	ف	گ	ہ	ر	س	ل	م	بے خطر بوجھ (ٹن)
۹۰×۷ ۱/۲×۲۴	۴×۴	۷/۸	۱' ۶"	۶	۵	۱ ۱/۲	۳ ۳/۴	۲ ۱/۴	۱ ۱/۲	۳	۲ ۱/۴							۳۰
۷۵×۷×۲۴	۳×۴	۷/۸	۱' ۴"	۵	۴	۱ ۱/۲	۵	۲ ۱/۴	۱ ۱/۲	۳ ۳/۴	۲ ۱/۴							۲۴
۶۵×۶ ۱/۲×۲۰	۴×۴	۷/۸	۱' ۳"	۵	۴	۱ ۱/۲	۴	۲ ۱/۴	۱ ۱/۲	۳	۲ ۱/۴							۲۱ ۱/۲
۸۰×۸×۱۸	۴×۶	۷/۸	۱' ۲"	۶	۵	۱ ۳/۴	۲ ۵/۸	۲ ۱/۴				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴			۲	۵	۲۸ ۱/۲
۵۵×۶×۱۸	۴×۴	۳/۴	۱' ۳"	۵	۴	۱ ۱/۲	۴	۲ ۱/۴	۱ ۱/۲	۳	۲ ۱/۴							۱۷
۷۵×۸×۱۶	۴×۶	۷/۸	۱' ۰"	۶	۴	۱ ۱/۲	۳	۲ ۱/۴				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴			۱ ۱/۲	۴ ۱/۲	۲۶
۵۰×۶×۱۶	۳ ۱/۲×۶	۳/۴	۱' ۰"	۵	۴	۱ ۱/۲	۳	۲				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۱ ۱/۲	۲ ۱/۴			۱۶ ۱/۲

۲۵×۶×۱۵	۲ ۱/۲×۶	۳/۴	۱′ ۰″	۵	۴	۱ ۱/۲	۳	۲				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۱ ۱/۲	۲ ۱/۴			۱۵ ۱/۲
۶۰×۸×۱۴	۴×۶	۷/۸	۱۰ ۱/۲″	۵	۴	۱ ۳/۸	۲ ۱/۲	۲ ۱/۴				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۱ ۳/۸	۱ ۷/۸			۲۲
۴۰×۵ ۱/۲×۱۴	۲ ۱/۲×۶	۳/۴	۱۱″	۵	۳	۱ ۱/۴	۴	۲				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۱ ۱/۲	۲			۱۴ ۱/۲
۳۵×۵×۱۳	۳ ۱/۲×۶	۳/۴	۹″	۴	۳	۱ ۱/۲	۳	۲				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴			۱ ۱/۲	۶	۱۱ ۱/۲
۶۵×۸×۱۲	۴×۶	۷/۸	۸″	۵	۳	۱ ۱/۲	۲ ۱/۲	۲ ۱/۴				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۱ ۱/۲	۱ ۱/۴			۱۹ ۱/۲
۳۰×۵×۱۲	۳ ۱/۲×۶	۳/۴	۹″	۴	۳	۱ ۱/۲	۳	۲				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴			۱ ۱/۲	۶	۱۰ ۱/۲
۵۵×۸×۱۰	۴×۶	۷/۸	۵ ۱/۲″	۳	۲	۱ ۳/۸	۲ ۳/۴	۲ ۱/۴				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۱ ۳/۸	۱ ۳/۸			۱۱ ۱/۲
۴۰×۶×۱۰	۲ ۱/۲×۶	۳/۴	۷″	۵	۳	۱ ۱/۴	۲ ۱/۲	۲				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۱ ۱/۲	۱ ۱/۸			۱۴ ۱/۲
۲۵×۴ ۱/۲×۱۰	۳ ۱/۲×۶	۳/۴	۷″	۴	۲	۱ ۱/۴	۴ ۱/۲	۲				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴			۱ ۱/۴	۴ ۱/۲	۹ ۱/۲
۵۰×۷×۹	۴×۶	۷/۸	۵ ۱/۲″	۳	۲	۱ ۳/۸	۲ ۳/۴	۲ ۱/۴				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۱ ۳/۸	۱ ۳/۸			۱۱ ۱/۲
۲۱×۴×۹	۲ ۱/۲×۲ ۱/۲	۳/۴	۷″	۳	۲	۱ ۱/۴	۴ ۱/۲	۲	۱ ۱/۴	۲ ۱/۴	۲							۷

پانچواں باب

شہتیروں میں خماؤ کے معیار اور جزی قوتیں

تعریفات ـــــ کسی شہتیر کے فصل کے کسی نقطے پر جزی قوت اُن تمام عمودی قوتوں کا جبری حاصل جمع ہے جو شہتیر پر اُس نقطے کے دائیں یا بائیں طرف عمل کریں۔

شہتیر کے فصل کے کسی نقطے پر خماؤ کا معیار اُن تمام قوتوں کے اُس نقطے کے گرد کے معیاروں کا جبری حاصل جمع ہے جو اس نقطے کے دائیں یا بائیں طرف عمل کریں۔

چونکہ شہتیر اس پر عمل کرنے والی قوتوں کے تحت تعادل میں ہے اس لیے کسی نقطے کے دونوں طرف کی قوتوں کا جبری حاصل جمع اور اس کے گرد ان کے معیاروں کا جبری حاصل جمع صفر ہوگا۔ اس طرح دونوں جانبوں میں سے کوئی سی جانب لی جائے تو اس طرف غور کرنے سے جزی قوت اور خماؤ کے معیار وہی حاصل ہونگے البتہ علامت میں اُن کے مخالف ہونگے جو دوسری جانب پر غور کرنے سے حاصل ہوں۔ ہم جہاں تک ممکن ہو جزی قوت اور خماؤ کے معیار ہمیشہ دائیں جانب کی قوتوں سے حاصل کرینگے اور جزی قوت کو اوپر دار اور خماؤ کے معیار کو مخالف سمتِ ساعت ہونے پر مثبت

سمجھینگے۔ بجوار قوت اور موافق سمتِ ساعت معیار منفی ہونگے۔

خماؤ کے معیار اور جزی قوت کے نقشے

اگر فصل کے ہر نقطے پر کی جزی قوت اور خماؤ کا معیار فصل کو اساس مان کر ترسیم کیے جائیں اور اس طرح حاصل ہونے والے نقاط میں سے منحنی گزارے جائیں تو دو نقشے حاصل ہونگے جو جزی قوت اور خماؤ کے معیار کے نقشے کہلاتے ہیں۔ اِن نقشوں سے فصل کے کسی نقطے پر اِن کی قیمتیں پڑھ لی جاسکتی ہیں۔ ہم لداؤ کی مختلف قسموں اور شہتیر کے سہاروں کے مختلف طوروں کے لیے اِن نقشوں کی شکلوں پر غور کرینگے اور پہلے ساکن بوجھوں سے بحث کرینگے۔ کسی نقطہ ط کے لیے جزی قوت $ق_ط$ سے اور خماؤ کا معیار $م_ط$ سے تعبیر کیا جائیگا۔

خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے ساکن بوجھوں کے تحت

(۱) برآمدہ بیرم — یعنی ایسے شہتیر جو ایک سرے پر ثابت اور دوسرے پر آزاد ہوں اور تمام بوجھ شہتیر کے طول کے علی القوائم ہوں

صورت ۱۔ برآمدہ بیرام پر ایک منفرد بوجھ — فرض کرو کہ ایک برآمدہ بیرم کے، جو سرے ب پر ثابت ہے (شکل ۵۲)، نقطہ ۱ پر، جو ب سے فاصلہ ل پر ہے، ایک منفرد بوجھ و ہے۔ ۱ سے فاصلہ لا پر کسی نقطہ ط پر غور کرو۔

تب

$$ق_ط = و$$

یہ سارے فصل میں مستقل ہے۔

∴ جز کا نقشہ ایک مستطیل ہوگا جس کا ارتفاع و ہوگا۔

اور $م_ط = و \times لا$

یہ لا کے متناسب ہے:۔

∴ خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مثلث ہوگا جس کا اعظم معین و ل ہے

جو نقطہ ب پر خماؤ کا معیار ہے۔

صورت ۲۔ برآمدہ بیرام پر دو منفرد بوجھ — چونکہ کسی نقطے پر خماؤ کے معیار اور جزی قوت کی تعریف یہ ہے کہ یہ اس نقطے سے بائیں طرف کے معیاروں اور قوتوں کے حاصل جمع ہیں اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک سے زیادہ بوجھوں کے لیے خماؤ کے معیار اور جزی قوت کے نقشے علیحدہ بوجھوں کے نقشوں کو جمع کرنے سے حاصل ہونگے۔ موجودہ صورت میں جس میں بوجھ و$_1$ اور و$_2$ ثابت سرے سے فاصلوں ل$_1$ اور ل$_2$ پر عمل کرتے ہیں نقشے اس طرح حاصل ہونگے کہ علیحدہ نقشوں کو جمع کیا جائے جس طرح کہ شکل ۵۲ (۲) میں دکھایا گیا ہے۔

صورت ۳۔ برآمدہ بیرام پر یکساں بوجھ — فرض کرو کہ فصل ل کے ایک برآمدہ بیرم اب پر و ٹن فی طولی فٹ کا ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ ہے۔ آزاد سرے ا سے فاصلہ لا پر ایک نقطہ ط پر غور کرو۔ تب

ق$_ط$ = اط پر کا بوجھ
= و لا

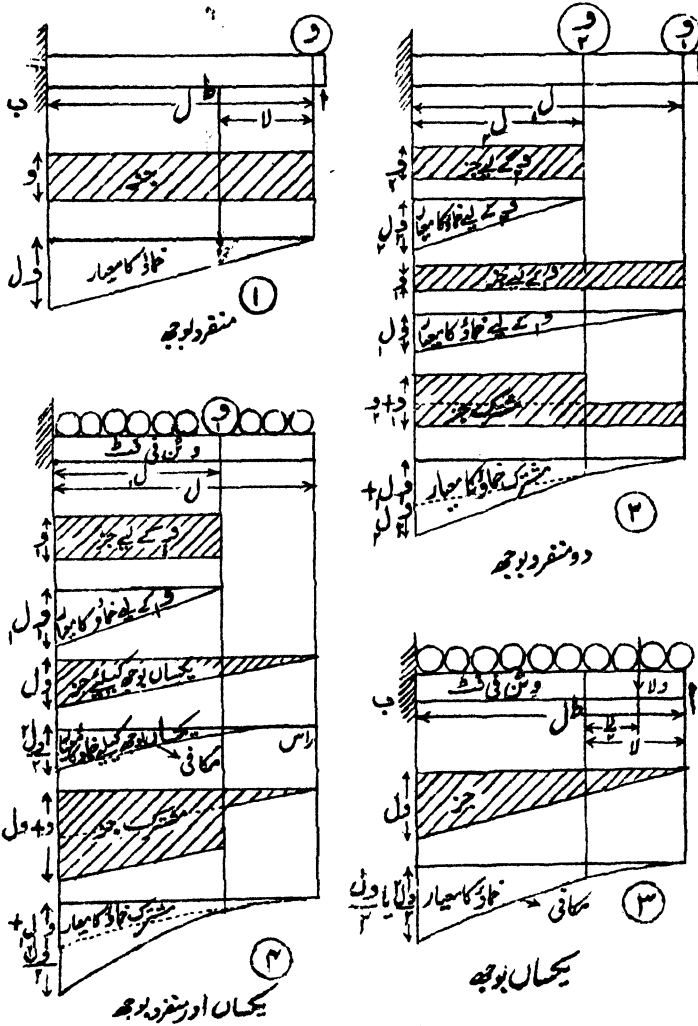
یہ لا کے متناسب ہے اس لیے جز کا نقشہ ایک مثلث ہوگا اور اعظم جز سرے ب پر ہوگا اور و ل یا و کے مساوی ہوگا جہاں و برآمدہ بیرم پر کا مجموعی بوجھ ہے۔

م$_ط$ = بوجھ و لا کا معیار ط کے گرد
= و لا × $\frac{\text{لا}}{۲}$
= $\frac{\text{و لا}^2}{۲}$

یہ لا^2 کے متناسب ہے اس لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مکافی ہوگا جس کا راس ا پر ہوگا۔ اعظم خماؤ کا معیار $\frac{\text{و ل}^2}{۲}$ یا $\frac{\text{و ل}}{۲}$ ہوگا اور ب پر واقع ہوگا۔

صورت ۴۔ برآمدہ بیرام پر منفرد بوجھ اور یکساں بوجھ۔

اِس صورت میں، صورت ۲ کی طرح، جز اور خماؤ کے معیار کے نقشے اِس طرح حاصل ہونگے کہ علیحدہ نقشے صورت ۱ اور ۳ کے لیے کھینچے جائیں اور ان کو جمع کیا جائے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

صورت ۵ - برآمدہ بیرم پر یکساں طور پر بڑھتا ہوا بوجھ۔

شکل ۵۲

برآمدہ بیرموں کے لیے خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے

فرض کرو کہ ایک برآمدہ بیرم اب پر ایک ایسا بوجھ ہے جس کی حدت آزاد سرے ا سے ثابت سرے ب تک یکساں طور پر بڑھتی ہے (شکل ۵۳)۔ اس کی عملی مثال کسی تالاب یا ٹانکی کی دیوار ہے جس پر پانی کا دباؤ عمل کرے۔

فرض کرو کہ ا سے اکائی فاصلے پر بوجھ کی حدت و ٹن فی طولی فٹ ہے۔ تب ا سے فاصلہ لا پر کسی نقطہ ط پر بوجھ کی حدت و لا ہوگی۔ ب پر بوجھ کی حدت ول ہوگی اور کل بوجھ

$$= و = \frac{ول}{۲} \times ل = \frac{ول^۲}{۲}$$

ق$_ط$ = ط کے بائیں طرف کل بوجھ

$$= ولا \times \frac{لا}{۲} = \frac{ولا^۲}{۲}$$

∴ جز کا نقشہ ایک مکافی ہوگا جس کا راس ا ہوگا۔ اعظم جزب پر ہوگا اور و کے مساوی ہوگا۔

م$_ط$ = ط کے بائیں طرف کے بوجھ کا معیار

$$= \frac{ولا^۲}{۲} \times \frac{لا}{۳} = \frac{ولا^۳}{۶}$$

∴ خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک منحنی ہے جس کے معین لا^۳ کی طرح بدلتے ہیں۔ اس طرح کا منحنی تیسرے رتبے کا مکافی کہلاتا ہے۔

اعظم خماؤ کا معیار جو ب پر ہے $= \frac{ول^۳}{۶} = \frac{ول}{۳}$

نقشے شکل ۵۳ کے مطابق ہونگے۔

صورت ۷۔ برآمدہ بیرم پر بے قاعدہ بوجھ۔ ترسیمی طریقہ

فرض کرو کہ ایک برآمدہ بیرم پر چند بوجھ (۰،۱) (۱،۲) وغیرہ (شکل ۵۴) عمل کرتے ہیں۔ جز اور خماؤ کے معیار کے نقشے حاصل کرنے کے لیے ایک سمتی خط (۰،۵) کھینچو جو ان قوتوں کو کسی مناسب پیمانے پر تعبیر کرے اور اس خط سے کسی مناسب فاصلہ ف پر ایک قطب ط لو اور سمتی خط پر کے ۰ سے ۵ تک ہر نقطے کو ط سے ملاؤ۔

اب قوتوں کے خطوط کو قطع کرتے ہوئے حسب ذیل خطوط کھینچو۔ ط کے

متوازی و گ اور رقبہ ۱ میں ط ۱ کے متوازی ا ب۔ رقبہ ۲ میں ط ۲ کے متوازی ب ج اور اسی طرح یہاں تک کہ نقطہ س حاصل ہو۔
تب و ب ج د ع س گ خماؤ کے معیار کا نقشہ ہوگا۔

شکل ۵۳ع۔ برآمدہ بیرم کے لیے خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے
(گزشتہ سلسلہ)

جز کا نقشہ حاصل کرنے کے لیے سمتی خط پر کے نقاط ۰ تا ہ میں سے ان کے متناظر رقبوں میں اُفقی خط کھینچو۔ نقطہ ۰ میں کا خط پورے فصل میں کھینچا جائے۔ اس طرح جو زینہ نما شکل حاصل ہوگی وہ جز کا نقشہ ہوگی۔

ثبوت۔ فصل کے کسی نقطہ ن پر غور کرو اور ا ب اور ب ج کو خارج ہوکر ریسمانی کثیر الاضلاع کے معین ن ن٫ کو جو نقطہ ن کے لیے ہے نقاط بَ اور جَ پر ملنے دو۔

اب مثلثات و ن٫ بَ اور ط ۰ ا پر غور کرو۔

یہ مشابہ ہیں اور چونکہ مشابہ مثلثوں کے قاعدے ارتفاعوں کے تناسب میں ہونگے اس لیے

$$\frac{ن_۱ بَ}{۱٬۰} = \frac{ا ن_۱}{ف}$$

∴ ف × ن٫ بَ = ۱٬۰ × ا ن٫

لیکن ۱٬۰ × ا ن٫ = قوت ۱٬۰ کا معیار ط کے گرد

∴ ف × ن٫ بَ = قوت ۱٬۰ کا معیار ط کے گرد

اسی طرح یہ حاصل ہوتا ہے کہ

ف × بَ جَ = قوت ۱٬۲ کا معیار ن کے گرد

اور ف × جَ ن٫ = قوت ۲٬۲ کا معیار ن کے گرد

∴ حاصل ہوا کہ ف × ن ن٫ = ف (ن٫ بَ + بَ جَ + جَ ن٫)

= ن کے دائیں طرف کی تمام قوتوں کا معیار ن کے گرد

= هـ ن

اور چونکہ ف ایک مستقل مقدار ہے اس لیے معلوم ہوا کہ ریسمانی کثیر الاضلاع کے معین شہتیر میں اپنے متناظر نقاط پر خماؤ کے معیار کو تعبیر کرتے ہیں۔

اب ن پر کے جز ق پر غور کرو۔ ن کے دائیں طرف کی مجموعی قوت

= ۱ء + ۲ء۱ + ۲ء۲ = ۳ء۰ ۳ء اور صرف یہی قیمت جز کے نقشے میں حاصل ہوئی ہے۔

پیمانے۔ تمام ترسیمی عملوں میں یہ بے حد ضروری ہے کہ مختلف مقداریں کس پیمانے پر کھینچی گئی ہیں صراحت کے ساتھ بیان کیا جائے اور اس کا خیال رکھا جائے کہ یہ پیمانے ان مقداروں کو پڑھنے میں سہولت بخش ہوں۔

فرض کرو کہ مکانی نقشے کا پیمانہ ۱ انچ = لا فٹ ہے اور سمتی خط پر بوجھ کا پیمانہ ۱ انچ = م ٹن ہے۔ اور قطبی فاصلہ نقشے میں ف حقیقی انچ ہے۔ تب خماؤ کے معیاروں کو رسیائی کثیر الاضلاع سے پڑھنے کے لیے پیمانہ ۱ انچ = ف × لا × م فٹ ٹن ہوگا۔

اس لیے ف کو اس طرح انتخاب کرنا چاہیے کہ خماؤ کے معیار کا پیمانہ ایک سہولت بخش بے کسر عدد ہو۔

عددی مثال کے طور پر فرض کرو کہ مکانی پیمانہ ۱ انچ = ۴ فٹ ہے اور بوجھ کا پیمانہ ۱ انچ = ۲ ٹن ہے، تب اگر ف = ۲½ انچ لیا گیا تو خماؤ کے معیار کا پیمانہ ۱ انچ = ۴ × ۲ × ۲½ = ۲۰ فٹ ٹن ہوگا۔

اگر ف = ۲ انچ لیا جاتا تو خماؤ کے معیار کا پیمانہ ۱ انچ = ۱۶ فٹ ٹن ہوتا جو اتنا سہولت بخش نہ ہوتا۔

ب۔ سادہ طور پر سہارے ہوئے شہتیر ــــــ یعنی شہتیر

جو دو سہاروں پر صرف ٹکے ہوئے ہوں اور سارا لداؤ شہتیر کے طول کے علی القوائم ہو۔ سہارے ہمیشہ شہتیر کے سروں پر فرض کیے جائینگے سوائے اس صورت کے کہ اس کے خلاف صراحت کی گئی ہو۔

سادہ طور پر سہارے ہوئے شہتیروں میں عمل کرنے والی قوتیں بوجھ اور سہاروں کے ردِّ عمل ہیں۔ ردِّ عملوں کا حاصل جمع مجموعی بوجھ کے مساوی ہوگا اور ردِّ عملوں کی قیمت معیاروں کے ذریعے حاصل ہوگی جس کا طریقہ باب ۲ میں سمجھایا گیا ہے۔ سرے چونکہ آزادانہ سہارے ہوئے ہیں اس لیے

دونوں سروں پر کوئی خماؤ کا معیار نہ ہوگا۔

ہم ذیل کی معیاری صورتوں پر غور کرینگے :۔

صورت ۱۔ منفرد بوجھ کسی مقام پر ۔۔۔ فرض کرو کہ ایک بوجھ و فصل ل کے ایک شہتیر ا ب کے ایک نقطہ ج پر رکھا گیا ہے جس کے فاصلے ا اور ب سے علی الترتیب ا اور ب ہیں۔

ب پر کا ردِّ عمل $\text{ر}_{\text{ب}}$ معلوم کرنے کے لیے ا کے گرد معیار لو۔

تب $\text{ر}_{\text{ب}} \times \text{ل} = \text{و} \times \text{ا}$

$$\text{ر}_{\text{ب}} = \frac{\text{و} \times \text{ا}}{\text{ل}}$$

اسی طرح $$\text{ر}_{\text{ا}} = \frac{\text{و} \times \text{ب}}{\text{ل}}$$

اب ب اور ج کے درمیان کسی نقطہ ط پر غور کرو۔

$$\text{ق}_{\text{ط}} = \text{ر}_{\text{ب}} = + \frac{\text{و ا}}{\text{ل}}$$

∴ ب اور ج کے درمیان جز کا نقشہ ایک مستطیل ہوگا جس کا ارتفاع $= \frac{\text{و ا}}{\text{ل}}$

اب ج اور ا کے درمیان کوئی نقطہ طَ لو۔

$$\text{ق}_{\text{طَ}} = \text{ر}_{\text{ب}} - \text{و}$$

$$= \frac{\text{و ا}}{\text{ل}} - \text{و} = \text{و}\left(\frac{\text{ا} - \text{ل}}{\text{ل}}\right) = -\frac{\text{و ب}}{\text{ل}} = -\text{ر}_{\text{ا}}$$

∴ ج اور ا کے درمیان جز کا نقشہ ایک مستطیل ہوگا جس کا ارتفاع $= -\frac{\text{و ب}}{\text{ل}}$

برآمدہ برم کی صورت میں مثبت اور منفی جز کے درمیان تمیز کرنے کی ضرورت نہیں ہوئی کیونکہ جز کی سمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوئی لیکن

موجودہ صورت میں سمت میں تبدیلی ہوئی ہے۔ اِس لیے ہم صفحہ ۱۴۰ پر دیا ہوا قاعدہ استعمال کرینگے۔

$$\text{م}_{\text{ط}} = \text{ر}_{\text{ب}} \times \text{لا} = \frac{\text{و} \times \text{ا} \times \text{لا}}{\text{ل}}$$

یہ لا کے متناسب ہے۔ اس لیے ب اور ج کے درمیان خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مثلث ہوگا اور ج پر خماؤ کا معیار $\frac{\text{و ا ب}}{\text{ل}}$ ہوگا۔ اگر ط اِس کی بجائے ج اور ا کے درمیان ہوتا اور ا سے فاصلہ لاَ پر ہوتا تو

$$\text{م}_{\text{ط}} = \text{ر}_{\text{ب}} (\text{ل} - \text{لاَ}) - \text{و} (\text{ل} - \text{لاَ} - \text{ب})$$

$$= \text{ر}_{\text{ب}}\,\text{ل} - \text{ر}_{\text{ب}}\,\text{لاَ} - \text{و ل} + \text{و لاَ} + \text{و ب}$$

$$= \text{لاَ} (\text{و} - \text{ر}_{\text{ب}}) + \text{و ب} - \text{ل} (\text{و} - \text{ر}_{\text{ب}})$$

$$= \text{ر}_{\text{ا}}\,\text{لاَ} + \text{و ب} - \text{ل}\,\text{ر}_{\text{ا}}$$

$$= \frac{\text{و ب لاَ}}{\text{ل}} + \text{و ب} - \text{و ب}$$

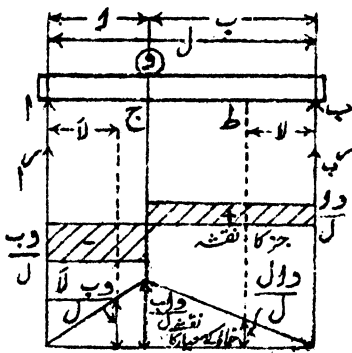
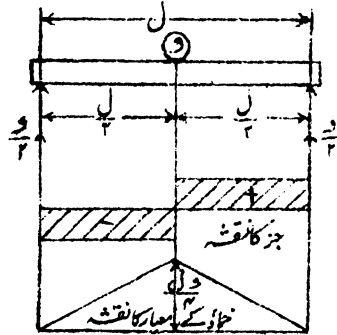
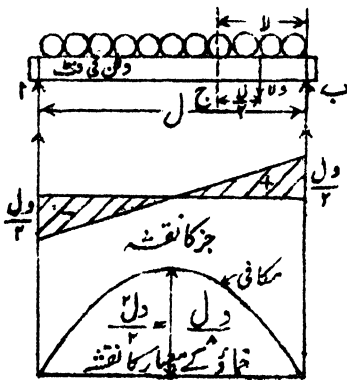
$$= \frac{\text{و ب لاَ}}{\text{ل}}$$

یہ لاَ کے متناسب ہے۔ اِس لیے ا اور ج کے درمیان بھی خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مثلث ہوگا اور پورا نقشہ شکل کے مطابق ہوگا۔

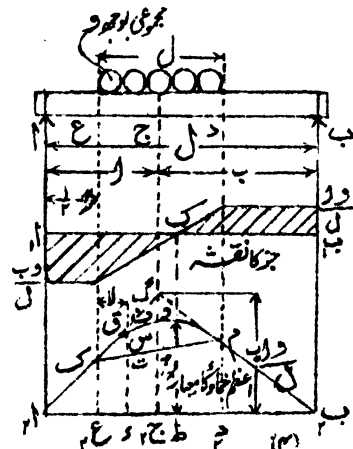
صورت ۲۔ مرکز پر منفرد بوجھ —— یہ گزشتہ صورت کی ایک خاص شکل ہے جس میں $\text{ا} = \text{ب} = \frac{\text{ل}}{۲}$

اب ہر ایک ردِّ عمل $\frac{\text{و}}{۲}$ ہوگا اور اعظم خماؤ کا معیار

$$= \frac{\text{و} \times \frac{\text{ل}}{۲} \times \frac{\text{ل}}{۲}}{\text{ل}} = \frac{\text{و ل}}{۴}$$

صورت ۳۔ پورے فصل پر یکساں بوجھ — فرض کرو کہ پورے فصل ا ب پر ایک یکساں بوجھ و ٹن فی طولی فٹ کا چھایا ہوا ہے اور ب سے فاصلہ لا پر ایک نقطہ ج پر غور کرو۔
اِس صورت میں دونوں ردِّ عمل تشاکل کی وجہ سے مساوی ہونگے

شکل ۵۴ ۔ سادہ طور پر سہارے ہوئے شہتیر

اور ہر ایک $\frac{و ل}{۲}$ یا $\frac{و}{۲}$ ہوگا۔

$$ق_ج = ر_ب - و لا = و\left(\frac{ل}{۲} - لا\right)$$ تب

یہ ایک خطی ربط ہے اس لیے جز کا نقشہ ایک مثلث ہوگا جیسا کہ دکھایا گیا ہے اور اس کی قیمتیں سروں پر $\pm \frac{و ل}{۲}$ ہونگی اور مرکز پر علامت بدلیگی۔

اب خماؤ کے معیار پر غور کرو۔

$$م_ج = ر_ب \times لا - و لا \times \frac{لا}{۲}$$

$$= \frac{و ل لا}{۲} - \frac{و لا^۲}{۲} = \frac{و}{۲}(ل لا - لا^۲)$$

یہ $لا^۲$ پر منحصر ہے، اِس لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مکافی ہوگا۔
اعظم خماؤ کا معیار مرکز پر یعنی $لا = \frac{ل}{۲}$ پر ہوگا۔

تب اعظم خماؤ کا معیار $= \frac{و}{۲}\left\{\left(\frac{ل \times ل}{۲}\right) - \left(\frac{ل}{۲}\right)^۲\right\}$

$$= \frac{و}{۲}\left\{\frac{ل^۲}{۲} - \frac{ل^۲}{۴}\right\} = \frac{و}{۲} \times \frac{ل^۲}{۴}$$

$$= \frac{و ل^۲}{۸} \text{ یا } \frac{و ل}{۸}$$

صورت ۴۔ فصل کے ایک حصے پر یکساں بوجھ — فرض کرو

کہ و ٹن فی طولی فٹ کا ایک یکساں بوجھ جس کا طول ع د = لہ ہے فصل ل کے شہتیر ا ب پر رکھا جاتا ہے اور فرض کرو کہ بوجھ کا مرکز ج سروں ا اور ب سے فاصلوں $ل_ا$ اور $ل_ب$ پر ہے۔

تب اگر مجموعی بوجھ و لہ = و

تو $ر_ب = \frac{و ل_ا}{ل}$ اور $ر_ا = \frac{و ل_ب}{ل}$

ب اور د کے درمیان جز مستقل ہوگا اور $\frac{و ا_۱}{ل}$ ہوگا۔ د اور ع کے درمیان جز یکساں طور پر گھٹیگا یہاں تک کہ ع پر جز

$$= ب_۱ - و = \frac{و ا_۱}{ل} - و = - \frac{و ب_۱}{ل} = - ر_۱$$

ع اور ا کے درمیان جز مستقل ہوگا اور $- \frac{و ب_۱}{ل}$ ہوگا۔ اِس طرح جز کا نقشہ وہ حاصل ہوگا جو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

نقطہ ک جس پر جز صفر ہے اِس طرح معلوم ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ بوجھ کے مرکز ج سے فاصلہ لا پر ہے

تب $ق = ب_۱ - و(\frac{لہ}{۲} - لا) = ۰$

یا $\frac{و ا_۱}{ل} - \frac{و لہ}{۲} + و لا = ۰$

$و لا = \frac{و لہ}{۲} - \frac{و ا_۱}{ل} = \frac{و لہ}{۲} - \frac{و لہ ا_۱}{ل}$

$\therefore \quad لا = \frac{لہ}{۲} - \frac{ا_۱ لہ}{ل} = لہ \left(\frac{۱}{۲} - \frac{ا_۱}{ل} \right)$

خماؤ کے معیار کا نقشہ اِس طرح کھینچا جا سکتا ہے کہ قاعدہ $ا_۲ ب_۲$ پر ایک طول $ج_۲ گ$ مساوی $\frac{د ا_۱ ب_۱}{ل}$ کے، یعنی اُس خماؤ کے معیار کے کھینچا جائے جو سارے بوجھ کے ج پر مرتکز ہونے کی صورت میں ج پر ہو۔

اب گ کو $ا_۲$ سے اور $ب_۲$ سے ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ ملانے والے خطوط ع اور د میں کے انتصابی خطوط کو ک اور م پر قطع کرتے ہیں۔

ک م کو ملاؤ جو $ج_۲ گ$ کو جہ پر قطع کرے اور جہ گ کی تنصیف ف پر کرو۔ ک، ف، اور م میں سے ایک مکافی ک س ف ن م کھینچو۔

تب مکمل خماؤ کے معیار کا نقشہ $ا_۲$ ک ف م $ب_۲$ ہوگا۔

اِس کو ثابت کرنے کے لیے $ع^۱$ سے فاصلہ لا پر کسی نقطہ ی پر کے خماؤ کے معیار پر غور کرو۔ یہ فاصلہ لا ایسا ہو کہ ی لدے ہوئے حصے کے اندر واقع ہو۔

تب $\text{م}_{\text{ر}} = \text{ر}_{\text{۲}} \times \text{ا}_{\text{۲}}\text{ر} - \frac{\text{و}}{\text{له}} \times \text{لا} \times \frac{\text{لا}}{\text{۲}}$

$$= \frac{\text{و ب}}{\text{ل}}\left(\text{ا} - \frac{\text{له}}{\text{۲}} + \text{لا}\right) - \frac{\text{و لا}^{\text{۲}}}{\text{۲ له}} \quad \text{(۱)}$$

اب $\text{ج}_{\text{۲}}\text{گ} = \frac{\text{و ا ب}}{\text{ل}}$

$$\text{ک ع}_{\text{۲}} = \frac{\text{ج}_{\text{۲}}\text{گ} \times \text{ع}_{\text{۲}}\text{ج}_{\text{۲}}}{\text{ا}_{\text{۲}}\text{ج}_{\text{۲}}} = \frac{\text{و ا ب}}{\text{ل}} \times \frac{\left(\text{ا} - \frac{\text{له}}{\text{۲}}\right)}{\text{ا}}$$

$$= \frac{\text{و ب}}{\text{ل}}\left(\text{ا} - \frac{\text{له}}{\text{۲}}\right) \quad \text{(۲)}$$

$$\text{م د}_{\text{۲}} = \frac{\text{ج}_{\text{۲}}\text{گ} \times \text{د}_{\text{۲}}\text{ب}_{\text{۲}}}{\text{ب}_{\text{۲}}\text{ج}_{\text{۲}}} = \frac{\text{و ا ب}}{\text{ل}} \cdot \frac{\left(\text{ب} - \frac{\text{له}}{\text{۲}}\right)}{\text{ب}}$$

$$= \frac{\text{و ا}}{\text{ل}}\left(\text{ب} - \frac{\text{له}}{\text{۲}}\right) \quad \text{(۳)}$$

$$\text{ج}_{\text{۲}}\text{جه} = \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\left(\text{ک ع}_{\text{۲}} + \text{م د}_{\text{۲}}\right)$$

$$= \frac{\text{و}}{\text{۲ل}}\left\{\text{ب}\left(\text{ا} - \frac{\text{له}}{\text{۲}}\right) + \text{ا}\left(\text{ب} - \frac{\text{له}}{\text{۲}}\right)\right\}$$

$$= \frac{\text{و}}{\text{۲ل}}\left\{\text{۲ ا ب} - \frac{\text{له}}{\text{۲}}(\text{ا} + \text{ب})\right\} = \frac{\text{و}}{\text{۲ل}}\left\{\text{۲ ا ب} - \frac{\text{له ل}}{\text{۲}}\right\} \quad \text{(۴)}$$

$$\therefore \text{جه گ} = \text{ج}_{\text{۲}}\text{گ} - \text{ج}_{\text{۲}}\text{جه}$$

$$= \frac{\text{و ا ب}}{\text{ل}} - \frac{\text{و}}{\text{۲ل}}\left(\text{۲ ا ب} - \frac{\text{له ل}}{\text{۲}}\right)$$

$$= \frac{\text{و}}{\text{ل}}\left(\text{ا ب} - \text{ا ب} + \frac{\text{له ل}}{\text{۴}}\right) = \frac{\text{و له}}{\text{۴}} \quad \text{(۵)}$$

$$\therefore \text{جه ف} = \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{جه گ} = \frac{\text{و له}}{\text{۸}}$$

دیکھو یہ وہی خماؤ کا معیار ہے جو بوجھ و کو اس کے طول کے مساوی فصل پر رکھنے سے پیدا ہوتا۔

اب مکافی کی خاصیت سے

$$\frac{\text{ف جہ} - \text{س ت}}{\text{ف جہ}} = \frac{\text{ت جہ}^{2}}{\text{ک جہ}^{2}} = \frac{\text{د ج}_{2}^{2}}{\text{ع ج}_{2}^{2}} = \frac{\left(\frac{\text{ل}}{2} - \text{لا}\right)^{2}}{\left(\frac{\text{ل}}{2}\right)^{2}}$$

$$\therefore\ 1 - \frac{\text{س ت}}{\text{ف جہ}} = 1 - \frac{4\,\text{ل لا}}{\text{ل}^{2}} + \frac{4\,\text{لا}^{2}}{\text{ل}^{2}}$$

$$\therefore\ \text{س ت} = \frac{4(\text{ل لا} - \text{لا}^{2})}{\text{ل}^{2}} \times \text{ف جہ} = \frac{\text{و لا}}{2} - \frac{\text{و لا}^{2}}{2\,\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\text{د ت} = \text{ع}_{2}\text{ک} + \frac{\text{ع}_{2}\text{د}}{\text{ع}_{2}\text{ج}_{2}}\left(\text{ج}_{2}\text{جہ} - \text{ع}_{2}\text{ک}\right)$$

$$= \frac{\text{و ب}}{\text{ل}}\left(\text{ا} - \frac{\text{ل}}{2}\right) + \frac{2\,\text{لا}}{\text{ل}}\left\{\frac{\text{و}}{2\,\text{ل}}\left(2\,\text{ا ب} - \frac{\text{ل ل}}{2}\right) - \frac{\text{و ب}}{\text{ل}}\left(\text{ا} - \frac{\text{ل}}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{\text{و}}{\text{ل}}\left\{\text{ا ب} - \frac{\text{ب ل}}{2} + \frac{2\,\text{ا ب لا}}{\text{ل}} - \frac{\text{لا ل}}{2} - \frac{2\,\text{ا ب لا}}{\text{ل}} + \text{ب لا}\right\}$$

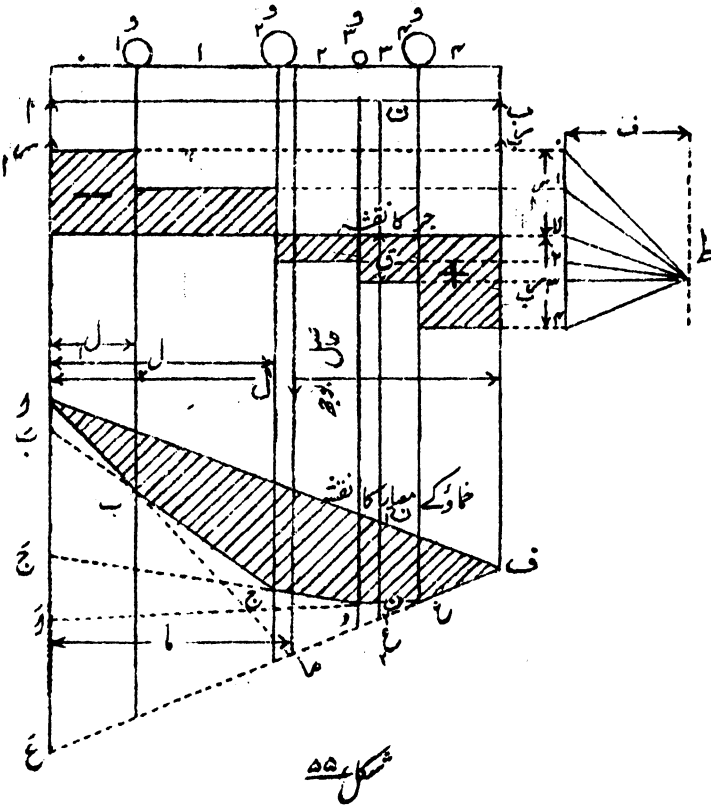
$$\therefore\ \text{د س} = \text{د ت} + \text{س ت}$$

$$= \frac{\text{و ب}}{\text{ل}}\left(\text{ا} - \frac{\text{ل}}{2} + \text{لا}\right) - \frac{\text{و لا}^{2}}{2\,\text{ل}}$$

(۱) کے ساتھ اس کا مقابلہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ د س سے دیے ہوئے نقطے پر کا خماؤ کا معیار حاصل ہوگا۔

آگے چل کر ثابت کیا جائیگا (صفحہ ۱۶۵) کہ خماؤ کا معیار فصل کے اُس نقطے پر اعظم ہوتا ہے جس پر جز صفر ہو۔ اس طرح ک یں کے انتصابی خط سے خماؤ کے معیار کے نقشے کا اعظم معین حاصل ہوگا۔

صورت ۵ — بے قاعدہ بوجھ - ترسیمی عمل —— فرض کرو کہ ایک فصل ا ب پر چند بوجھ و_{1}، و_{2}، و_{3}، و_{4} کہیں بھی رکھے گئے ہیں۔ بوجھوں کے

درمیان کے رقبوں پر نمبر لگاؤ اور (۰، ۱، ۲، ۳، ۴) ایک انتصابی سمتی خط کھینچو

شکل ۵۵

جزاور خماؤ کے معیار کے نقشوں کی ترسیمی ساخت

جو کسی مناسب پیمانے پر بوجھوں کو تعبیر کرے۔ اور سمتی خط سے ایک مناسب قطبی فاصلہ ف پر کسی جگہ ایک نقطہ ط لو اور اس سے نقاط ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ کو ملاؤ۔

اب رقبہ ۰ میں ا ب متوازی ط ۰ کے کھینچو۔ رقبہ ۱ میں ب ج متوازی ط ۱ کے اور علیٰ ہذا یہاں تک کہ ع ف متوازی ط ۴ کے کھینچ جائے۔ ا ف کو ملاؤ۔ تب شکل ا ب ج د ع ف ا بوجھوں کے دیے ہوئے

نظام کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ ہوگی۔

اب ریسمانی کثیر الاضلاع کے اختتامی ضلع ا ف کے متوازی ط لا کھینچو تو ہ، لا = $\frac{\text{م}}{\text{ب}}$ اور لا۰ = $\frac{\text{م}}{\text{۲}}$

جز کا نقشہ کھینچنے کے لیے لا میں سے ایک اُفقی خط سارے فصل میں کھینچو۔ یہ جز کے نقشے کا قاعدہ ہوگا۔ اب نقطہ ۰ میں سے رقبہ ۰ میں اُفقی خط کھینچو، نقطہ ا میں سے رقبہ ا میں اور علیٰ ہذا۔ اس طرح جو زینہ دار نقشہ حاصل ہوگا وہ جز کا نقشہ ہوگا۔

ثبوت۔ کڑیاں ج ب، د ج، ع د، ف ع کو پیچھے کی طرف خارج کرکے ا میں کے انتصابی خط سے نقاط بَ، جَ، دَ، عَ پر ملنے دو اور فرض کرو کہ پہلی کڑی و ب خارج ہوکر آخری کڑی ع ف سے ما پر ملتی ہے۔ تب جیسا کہ صفحہ [illegible] پر ثابت کیا گیا نقطہ ما وہ نقطہ ہے جس میں سے بوجھوں کا حاصل عمل کرتا ہے۔

اب مثلثات ا ب بَ اور ۰ ط ا مشابہ ہیں۔

$$\therefore \quad \frac{\text{ا بَ}}{\text{ل}_1} = \frac{\text{۰ا}'}{\text{ف}}$$

$$\therefore \quad \text{ا بَ} = \frac{\text{۰ا}' \times \text{ل}_1}{\text{ف}} = \frac{\text{و}_1 \times \text{ل}_1}{\text{ف}}$$

$$= \frac{\text{ا کے گرد پہلے بوجھ کا معیار}}{\text{ف}}$$

اسی طرح

$$\text{بَ جَ} = \frac{\text{ا کے گرد دوسرے بوجھ کا معیار}}{\text{ف}}$$

اور علیٰ ہذا۔

$$\therefore \quad \text{ا عَ} = \text{ا بَ} + \text{بَ جَ} + \text{جَ دَ} + \text{دَ عَ}$$

$$= \frac{\text{ا کے گرد بوجھوں کے میعاروں کا حاصل جمع}}{\text{ف}}$$

لیکن $ر_{ب} \times ل$ = ا کے گرد بوجھوں کے میعاروں کا حاصل جمع

$$\therefore \quad اعَ = \frac{ر_{ب} \times ل}{ف}$$

اب مثلثات ا عَ ف اور لا ۴ ط پر غور کرو۔ یہ مشابہ ہیں:۔

$$\therefore \quad \frac{اعَ}{ل} = \frac{۴' لا}{ف}$$

$$\therefore \quad ۴' لا = \frac{ف \times اعَ}{ل} = ر_{ب}$$

اسی طرح $لا'. = ر_{ا}$

اب فصل کے کسی نقطہ ن پر غور کرو۔

$$ق_{ن} = ر_{ب} - و_{۴}$$

$$= ۴' لا - ۳' ۴ = ۳' لا$$

لیکن جز کے نقشے کا معین ق مساوی ہے ۳' لا کے، اس لیے معلوم ہوا کہ زینہ نما شکل سے ہر نقطے پر صحیح جزی قوت حاصل ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ ن میں کا انتصابی خط خاؤ کے میعار کے نقشے کو $ن_{۱}$ $ن_{۲}$ پر ملتا ہے اور ف ع مخروجہ کو $ع_{۲}$ پر۔

تب بالکل سابق کے جیسے استدلال سے:

$$ن_{۱}ع_{۲} = \frac{\text{ن کے گرد } ر_{ب} \text{ کا میعار}}{ف}$$

$$ن_{۲}ع_{۲} = \frac{\text{ن کے گرد } و_{۴} \text{ کا میعار}}{ف}$$

∴ ن۱ن۲ = ن۱ع۲ - ن۲ع۲

= (ن کے گرد مماسب کا معیار - و۲ کا معیار) / ف

= مِن / ف

∴ مِن = ف × ن۱ن۲

∴ خماؤ کے معیار کے نقشے کے معین سے کسی نقطے پر خماؤ کا معیار تعبیر ہوتا ہے۔

پیمانے :- برآمدہ بیرم کی صورت (صفحہ ۱۴۴ و ۱۴۵) کی طرح اگر مکانی نقشے میں ا انچ = لا فٹ اور قوت کے نقشے میں ا انچ = ما ٹن، اور اگر قطبی فاصلہ ف حقیقی انچ ہو تو خماؤ کے معیار کے نقشے کے انتصابی معین خماؤ کے معیار کو پیمانہ ا انچ = ف × لا × ما فٹ ٹن پر تعبیر کرینگے۔

نوٹ۔ اس ساخت میں خماؤ کا معیار ن۱ن۲ انتصاباً ناپا جاتا ہے نہ کہ اختتامی خط ا ف کے علی القوائم۔

صورت ۲ - بے قاعدہ بوجھ - برآویختہ سرے

اوپر جو عمل بیان کیا گیا ہے اُس کا اطلاق اُس صورت پر بھی ہوتا ہے جس میں سرے برآویختہ ہوں۔ شکل ۵۶ میں ایسی ایک صورت دکھائی گئی ہے۔ حسب سابق بوجھوں کو ایک سمتی خط پر قایم کرو اور کوئی قطب ط لو۔ اب رقبہ ۰ میں یعنی سہارے کے انتصابی خط اور پہلی قوت کے خط کے درمیان کی جگہ میں ا ب متوازی ط ۰ کے کھینچو۔ اور رقبہ ا میں ب ج متوازی ط ا کے اور علیٰ ہذا۔ آخری کڑی ع ف آخری قوت کے خط اور ردّ عمل کے انتصابی خط کے درمیان کھینچی جائیگی۔ ا ف کو ملانے سے خماؤ کے معیار کا نقشہ حاصل ہوگا جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔

جز کا نقشہ حاصل کرنے کے لیے ط ہ متوازی ا ف کے کھینچو۔ تب ہ میں سے افقی خط ا اور ب کے درمیان جز کے لیے اساسی خط ہوگا۔ سروں کے حصوں میں جز سروں کی قوتوں ۱،۰ ا اور ۳،۴ کے مساوی ہونگے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

شکل ۵۶
شہتیر کے سرے پر آویختہ ترسیمی عمل

یہ ترسیمی طریقہ ہر قسم کے لداؤ کے لیے استعمال ہوسکتا ہے اور گزشتہ معیاری صورتوں میں سے جو صورت چاہیں اس کے ذریعے حل کر سکتے ہیں۔ مسلسل بوجھ کی صورت میں اس کو متعدد چھوٹے چھوٹے حصوں میں تقسیم کرنا چاہیے اور ہر ایک حصے کو ایک منفرد بوجھ سمجھنا چاہیے جو اس حصے کے مرکزِ جاذبہ میں سے عمل کرتا ہے۔

صورت ۷۔ یکساں بڑھتا ہوا بوجھ ——— فرض کرو کہ ایک شہتیر ا ب پر ایک بوجھ ہے جس کی حدت ب سے ا تک یکساں طور پر

بڑھتی ہے۔ فرض کرو کہ ب سے اکائی فاصلے پر بوجھ کی حدّت و ٹن فی طولی فٹ ہے۔ تب ب سے فاصلہ لا پر کسی نقطہ ط پر حدّت و لا ہوگی (شکل ۵۷)۔

شکل ۵۷۔ خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے (گزشتہ سلسلہ)

اپر بوجھ کی مدت و ل ہوگی اور کل بوجھ و مساوی ہوگا

$و_۱ ل \times \frac{ل}{۲} = \frac{و_۱ ل^۲}{۲}$ کے۔

حاصل بوجھ و لداؤ کے نقشہ کے مرکزِ جاذبہ ہیں سے یعنی ا سے فاصلہ $\frac{ل}{۳}$ پر عمل کریگا۔

$$\therefore \quad ر_ب = \frac{و}{۳}$$

$$ر_ا = \frac{۲ و}{۳}$$

اور　　$ق_ط$ = دائیں طرف کا مجموعی بوجھ

$$= \frac{و}{۳} - \frac{و_۱ لا^۲}{۲}$$

یہ $لا^۲$ پر منحصر ہے۔ اس طرح جزکا منحنی ایک مکافی ہوگا۔
نقطہ ج اس طرح حاصل ہوگا:—

$$ق_{ج_۱} = ۰ = \frac{و}{۳} - \frac{و_۱ لا^۲}{۲}$$

$$\therefore \quad \frac{و_۱ لا^۲}{۲} = \frac{و}{۳} = \frac{و_۱ ل^۲}{۳ \times ۲}$$

$$\therefore \quad لا^۲ = \frac{ل^۲}{۳}$$

$$لا = \frac{ل}{\sqrt{۳}} = ۰٫۵۷۷ \, ل$$

$$م_ط = ر_ب \times لا - \frac{و_۱ لا^۲}{۲} \times \frac{لا}{۳}$$

$$= \frac{و لا}{۳} - \frac{و_۱ لا^۳}{۶}$$

یہ لا² پر منحصر ہے۔ اس طرح خماؤ کے معیار کا منحنی ایک تیسرے رُتبہ کا مکافی ہوگا۔ اعظم خماؤ کا معیار صفر جز کے نقطے پر واقع ہوگا (دیکھو صفحہ ۱۶۵)، یعنی جہاں

$$\text{لا} = \frac{\text{ل}}{\sqrt{۳}}$$

$$\therefore \text{اعظم خماؤ کا معیار} = \frac{\text{و ل}}{۲\sqrt{۳}} - \frac{\text{و ل}}{۱۸\sqrt{۳}}$$

$$= \text{و ل}\left(\frac{۱}{۲\sqrt{۳}} - \frac{۱}{۹\sqrt{۳}}\right)$$

$$= \frac{۲\,\text{و ل}}{۹\sqrt{۳}} = \frac{۲\,\text{و ل}\sqrt{۳}}{۲۷}$$

$$= ۱۲۸ء\,\text{و ل}$$

اس طرح خماؤ کے معیار اور جز کے منحنی وہ حاصل ہوتے ہیں جو شکل میں دکھائے گئے ہیں۔

صورت ۸۔ یکساں لدا ہوا شہتیر اور برآویختہ سرے۔ فرض کرو کہ ایک شہتیر کا فصل ل ہے اور اس پر و٭ فی طولی فٹ کا یکساں بوجھ ہے اور دونوں سروں پر طول لا برآویختہ ہے اور سہاروں کے درمیان فاصلہ لہ ہے۔

برآویختہ حصے برآمدہ بیرم کی مانند ہیں اور ان کے جز اور خماؤ کے معیار کے نقشے وہ ہونگے جو دکھائے گئے ہیں۔ وسطی حصہ کے لیے خماؤ کے معیار کا منحنی ایک مکافی ہوگا جو نقطہ دار قاعدے پر کھنچا ہوا ہے اور حاصل منحنی سایہ دار دکھایا گیا ہے۔

اگر فصل کے وسطی حصے پر سے بوجھ ہٹا لیا جائے تو خماؤ کے معیار کا نقشہ دونوں سروں کے مکافیوں اور نقطہ دار خط پر مشتمل ہوگا۔ یہ خماؤ کا معیار وسطی حصے کے بوجھ سے پیدا ہونے والے معیار کی مخالف سمت میں ہے اس لیے وسطی حصے کا بوجھ رکھ کر اس کا مکافی کھینچنے پر حاصل منحنی ان دونوں کا فرق ہوگا جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔

یہ معلوم کرنے کے لیے کہ لا کی کس قیمت کے لیے حاصل اعظم خماؤ کا

معیار کم سے کم ہوگا حسب ذیل عمل کرو:۔

لا کے بڑھنے سے سہاروں پر کا خماؤ کا معیار بڑھتا ہے اور مرکز پر کا حاصل خماؤ کا معیار گھٹتا ہے۔ اِس لیے اعظم خماؤ کا معیار کم سے کم اُس وقت ہوگا جب کہ سہاروں پر کا خماؤ کا معیار مرکز پر کے خماؤ کے معیار کے مساوی ہو۔

$$\text{سہاروں پر خماؤ کا معیار} = \frac{\text{و لا}^{۲}}{۲}$$

$$\text{مرکز پر خماؤ کا معیار} = \frac{\text{و لہ}^{۲}}{۸} - \frac{\text{و لا}^{۲}}{۲}$$

$$\text{اگر یہ مساوی ہوں تو } \frac{\text{و لا}^{۲}}{۲} = \frac{\text{و لہ}^{۲}}{۸} - \frac{\text{و لا}^{۲}}{۲}$$

$$\therefore \quad \text{و لا}^{۲} = \frac{\text{و لہ}^{۲}}{۸}$$

$$\text{لا} = \frac{\text{لہ}}{۲\sqrt{۲}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{لہ}}{\text{ل}} = \frac{\text{لہ}}{\text{لہ} + ۲\,\text{لا}} = \frac{\text{لہ}}{\text{لہ} + \frac{\text{لہ}}{\sqrt{۲}}}$$

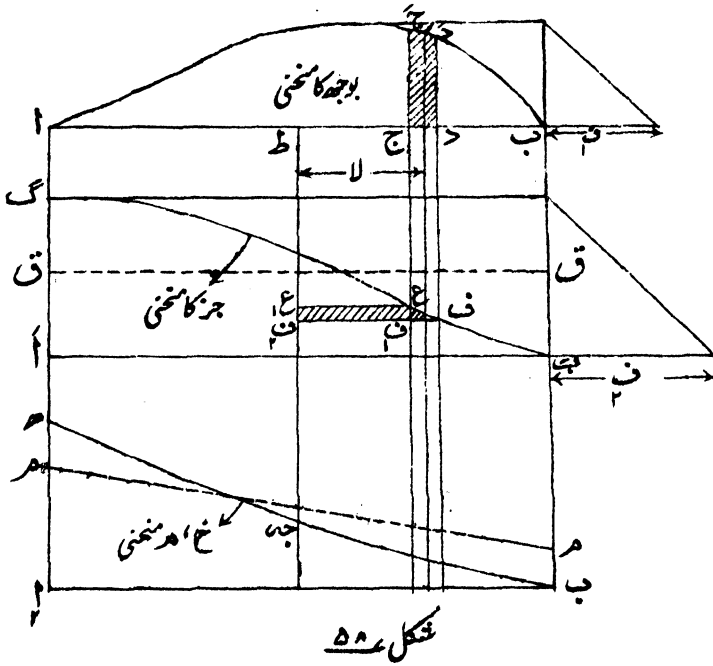
$$= \frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱} = \frac{۲}{\sqrt{۲} + ۲}$$

$$= \frac{۲(۲ - \sqrt{۲})}{۲} = ۲ - \sqrt{۲} = ۵۸۶ء$$

اِس سے حاصل ہوتا ہے کہ گھوڑی میز کے پائے کہاں لگائے جائیں جس سے زیادہ سے زیادہ مضبوطی حاصل ہو۔

بوجھ، جز، اور خماؤ کے معیار کے نقشوں کے درمیان ربط۔۔۔ فرض کرو کہ ا جَ دَ ب (شکل ۵۸) فصل اب پر بوجھ کے

منحنی کو تعبیر کرتا ہے فصل کے کسی نقطہ ط پر غور کرو۔ اور بوجھ کے ایک چھوٹے حصے ج د پر غور کرو جس کا مرکز ط سے فاصلہ لا پر ہے۔
تب بوجھ کے اس حصے کی وجہ سے ط پر جز بوجھ کے منحنی کے حصہ ج د کے مساوی ہوگا۔ اس طرح ط پر کا مجموعی جز $ق_ط$ اس نقطے تک بوجھ کے منحنی کے رقبے کے مساوی ہوگا۔

شکل ۵۸

بوجھ، جز اور خماؤ کے معیار اثر کے نقشوں کے درمیان ربط

لیکن یہ دکھایا جاچکا ہے (صفحہ ۷۲) کہ حاصل جمع منحنی وہ منحنی ہے جس کا کسی نقطے پر کا معین ابتدائی منحنی کے اس نقطے تک کے رقبے کو تعبیر کرتا ہے۔ اس لیے معلوم ہوا کہ جز کا منحنی بوجھ کے منحنی کا حاصل جمع منحنی ہوتا ہے۔
فرض کرو کہ ب ف ع گ ا بوجھ کے منحنی کا حاصل جمع منحنی ہے۔ اب ط پر کے خماؤ کے معیار پر غور کرو۔

بوجھ کے حصہ ج د کی وجہ سے ط پر خماؤ کا معیار

= بوجھ کا یہ حصہ × لا

اب اگر جز کے منحنی پر متناظر نقطے ع اور ف ہوں تو ان پر کے معینوں کا فرق حصہ ج د پر کے بوجھ کے مساوی ہوگا۔

∴ حصہ ج د پر بوجھ = ع ف$_1$

∴ حصہ ج د کی وجہ سے ط پر خماؤ کا معیار = ع ف$_1$ × لا

∴ سایہ دار حصہ ع ت ف$_2$ ع$_1$ اُس خماؤ کے معیار کو تعبیر کرتا ہے جو ط پر بوجھ کے حصہ ج د کی وجہ سے ہو۔

∴ ط پر مجموعی خماؤ کا معیار = م$_ط$ = ط تک جز کے نقشے کا رقبہ۔

∴ معلوم ہوا کہ خماؤ کے معیار کا منحنی جز کے منحنی کا حاصل جمع منحنی ھے۔

اس طرح جز کے منحنی کا حاصل جمع منحنی ب جہ ھ کھینچنے سے خماؤ کے معیار کا منحنی حاصل ہوگا۔

پیمانے — اگر بوجھ کے منحنی کا پیمانہ ا انچ = لا ٹن فی فٹ ہو اور جز کا منحنی حاصل کرنے کے لیے جو قطبی فاصلہ استعمال کیا گیا وہ مکانی منحنی کے پیمانے پر ف$_1$ ہو تو جز کے منحنی کا پیمانہ ا انچ = ف$_1$ لا ٹن ہوگا۔ اگر خماؤ کے معیار کا منحنی قطبی فاصلہ ف$_2$ (مکانی پیمانے پر) کے ذریعے حاصل کیا گیا تو خماؤ کے معیار کا پیمانہ ا انچ = ف$_2$ ف$_1$ لا فٹ ٹن ہوگا۔

اعظم خماؤ کے معیار کا نقطہ — اگر خماؤ کا معیار کسی نقطے پر ایک اعظم قیمت رکھتا ہو تو اس پر منحنی کا مماس افقی ہوگا۔ اور جز کے نقشے میں متناظر معین اصغر ہوگا تاکہ قطب میں سے گزرنے والا خط بھی افقی ہو۔

اس طرح یہ قاعدہ حاصل ہوتا ہے کہ اعظم خماؤ کا معیار اُس مقام پر واقع ہوتا ہے جہاں جز صفر ہو۔

جز اور خماؤ کے معیار کے اساسی خط ق ق اور م م اس پر منحصر ہونگے کہ سرے کیسے ہیں۔ اگر ایک سرا آزاد ہو تو اس پر جز اور خماؤ کا معیار صفر ہونگے۔ اگر ایک سرا آزادانہ سہارا ہوا ہو تو اس نقطے پر جز ردِ عمل کے مساوی ہوگا اور خماؤ کا معیار صفر ہوگا۔

اِن ربطوں کو ریاضی کی شکل میں اِس طرح بیان کیا جاتا ہے:۔ فرض کرو کہ مبداء سے فاصلہ لا پر کسی نقطہ پر بوجھ ف (لا) ہے۔

تب اِس نقطے پر جز = ∫ ف (لا) فرلا + $س_۱$

اور خماؤ کا معیار = ∫∫ ف (لا) فرلا + $س_۱$ لا + $س_۲$

تکمل کے مستقل $س_۱$ اور $س_۲$ سروں کی کیفیت پر منحصر ہیں اور اساسی خطوط کے مناظر ہیں جن کا اوپر ذکر کیا گیا ہے۔

جہازوں کے خماؤ کے معیار اور جز کے منحنی ــــ حاصل

جمع منحنی کے طریقے کے اطلاق کی ایک اچھی مثال جہازوں کی صورت میں پائی جاتی ہے۔ ہر جہاز کو ایک شہتیر تصور کرنا چاہیے جس پر لداؤ کا ایک پیچیدہ نظام عمل کرتا ہے۔ اور بڑے جہازوں کی صورت میں تعمیر سے پہلے مجوزہ ابعاد اور بوجھوں سے جز اور خماؤ کے معیار کے نقشے کھینچ لینے چاہییں۔

جہاز کو اس کے طول کے علی القوائم چند مستویوں سے جو تھوڑے تھوڑے فاصلے پر ہوں تقسیم کیا جاتا ہے۔ پھر ہر دو تراشوں کے درمیان مجوزہ خطِ آب تک سیّال کا ہٹایا ہوا حجم ہموار پانی میں معلوم کیا جاتا ہے۔ تب اِن میں سے ہر ایک حجم کا وزن ماسکونیات کے اصولوں کی رُو سے اِن حصّوں پر پانی کے اوپر وار دباؤ کے مساوی ہوگا۔ اِس طرح سے جہاز کے طول کے مختلف نقاط پر اوپر وار دباؤ فی فٹ طول معلوم ہوگا۔ اِن دباؤں کو جہاز کے طول کے اساس پر ترسیم کرنے سے جو منحنی حاصل ہوگا اُسے ساکن پانی میں اچھال کا منحنی کہتے ہیں۔ یہ منحنی ا ج ب (شکل ۵۹) ہے اور اچھال کے منحنی کا رقبہ جہاز پر پانی کے

مجموعی اوپر دار دباؤ کے مساوی ہوگا۔ اس کے بعد جہاز کا وزن اس کے جسم انجن اور اُس مال سمیت جس کا احتمال ہے ہر حصے کے لیے محسوب کیا جاتا ہے۔ اور وزن فی فٹ طول جہاز کو اساس ا ب پر اسی پیمانے پر ترسیم کیا جاتا ہے جس پر دباؤ ترسیم کیے گئے اور حاصل منحنی وزنوں کا منحنی کہلاتا ہے۔

وزنوں کے منحنی ا د ب کا رقبہ جہاز کے مجموعی وزن کے مساوی ہوگا اور چونکہ جہاز کا مجموعی وزن پانی کے مجموعی اوپر دار دباؤ کے مساوی ہونا چاہیے اس لیے اُچھال کے منحنی کا رقبہ وزنوں کے منحنی کے رقبے کے مساوی ہونا چاہیے۔ وزنوں کے منحنی اور اُچھال کے منحنی کے معینوں کا فرق اُس بوجھ کو تعبیر کرتا ہے جو جہاز کو بطور شہتیر کے برداشت کرنا ہوتا ہے اور اس کو ایک نئے اساس ا ب پر ترسیم کیا جائے تو بوجھ کا منحنی حاصل ہوتا ہے۔

نقاط ع، ف جن پر بوجھ کا منحنی اساسی خط کو عبور کرتا ہے "پانی سے اٹھائی ہوئی" تراشیں کہلاتی ہیں اور ان تراشوں پر جز اعظم ہوگا۔ بوجھ کے منحنی کا حاصل جمع منحنی معلوم کریں تو وہ جز کا منحنی ہوگا اور پھر اس کا حاصل جمع منحنی لینے سے خماؤ کے معیار کا منحنی حاصل ہوگا۔

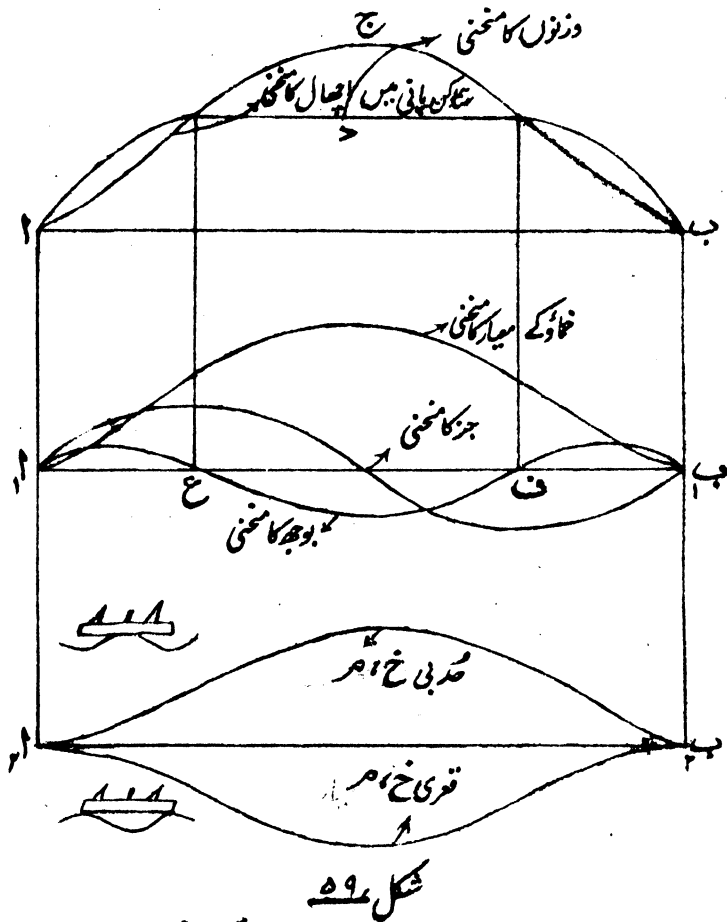
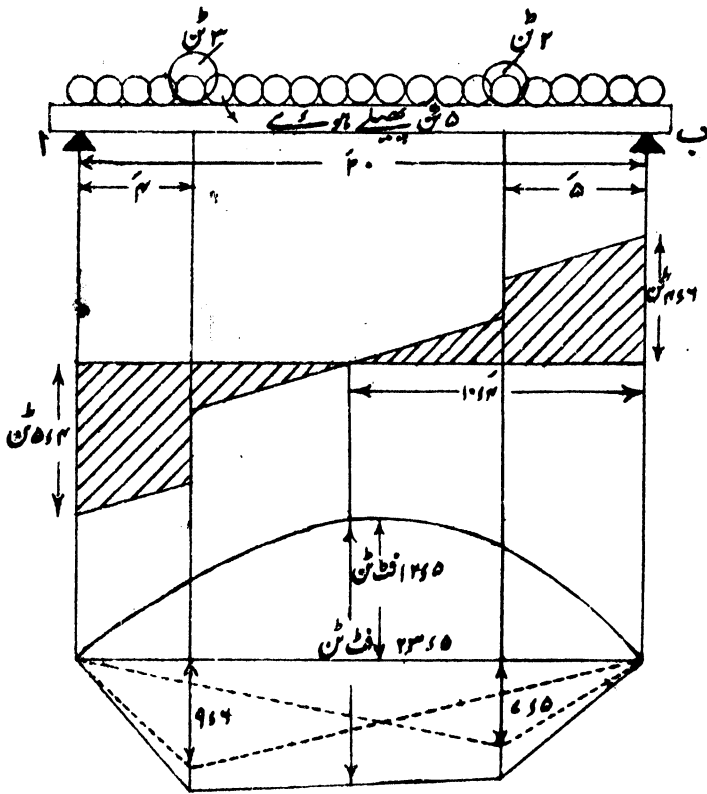
یہ منحنی جہاز کے لیے اُسی وقت کے لیے درست ہیں جب کہ جہاز ہموار پانی میں ہو۔ ناہموار پانی میں مسئلہ زیادہ مشکل ہو جاتا ہے لیکن دو خاص صورتیں قابلِ غور ہیں یعنی جب کہ موج کا اوج جہاز کے وسط کے نیچے آئے جس سے "حدبی فساد" واقع ہوتے ہیں اور جب کہ موج کا حضیض جہاز کے وسط کے نیچے آئے جس سے "قعری فساد" پیدا ہوتے ہیں۔ شکل میں یہ انتہائی صورتیں دکھائی گئی ہیں۔

اس مسئلہ کی مکمل بحث اس کتاب کی وسعت سے باہر ہے۔

شکل ۵۹
جہازوں کے خماؤ کے معیار اور جزر کے منحنی

مزید معلومات کے لیے طالب علم اُن کتابوں کا مطالعہ کریں جو بحری فنِ تعمیر سے بحث کرتی ہیں۔

جزر کے منحنیوں کی سیڑھیاں ـــــ عملاً یہ ناممکن ہے کہ جزر کے نقشے میں بالکل نوک دار سیڑھیاں حاصل ہوں کیونکہ بوجھ بالکل ایک ریاضیاتی نقطہ پر منتقل نہیں ہو سکتا بلکہ ایک چھوٹے طول پر پھیلا ہوا

شکل عـ۶ـلا

ہونا لازمی ہے۔ اس کا نتیجہ یہ ہے کہ جز کے نقشے کے کونے کسی قدر گول ہوجاتے ہیں جیسا کہ شکل عـ۶ـلا صفحہ ۱۷۳ میں مبالغے کے ساتھ دکھایا گیا ہے۔

عددی مثالیں

(۱) ۲۰ فٹ فصل کے ایک آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر پر ۵ ٹن کا ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ اور ۳ اور ۲ ٹن کے منفرد بوجھ سروں سے

علی الترتیب ۴ اور ۵ فٹ کے فاصلوں پر ہیں (دیکھو شکل ۶۱)۔

پہلے ردِّ عمل ر_ا اور ر_ب معلوم کرنا ہے۔

ب کے گرد معیار لو۔

ر_ا × ۲۰ = ۱۰ × ۵ + ۱۶ × ۳ + ۵ × ۲

= ۵۰ + ۴۸ + ۱۰ = ۱۰۸

∴ ر_ا = ۱۰۸/۲۰ = ۵٫۴ ٹن

ر_ب = ۱۰ − ۵٫۴ = ۴٫۶ ٹن

اس طرح جزی نقشہ وہ حاصل ہوتا ہے جو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ سیڑھیوں کی مقداریں منفرد بوجھوں کے مساوی ہیں۔ صفر جز کا مقام اس طرح حاصل ہوگا:—

فرض کرو کہ یہ ب سے فاصلہ لا پر ہے۔ تب

۰ = ق_لا = ر_ب − ۲ − ۵ × لا

= ۴٫۶ − ۲ − ۵ لا/۲۰

= ۲٫۶ − لا/۴

∴ لا/۴ = ۲٫۶

یا لا = ۱۰٫۴ فٹ

اس نقطے پر خماؤ کا معیار اعظم ہوگا اور حسب ذیل ہوگا:—

م_لا = ر_ب × ۱۰٫۴ − ۲ (۱۰٫۴ − ۵) − ۱/۴ × (۱۰٫۴)²/۲

= ۴۷٫۸۴ − ۱۰٫۸ − ۱۳٫۵۲

= ۲۳٫۵۲ فٹ ٹن

خماؤ کے معیار کا نقشہ یکساں پھیلے ہوئے بوجھ کے لیے ایک مکافی ہوگا جس کا اعظم معین = $\frac{۲۰ \times ۵}{۸}$ = ۱۲٫۵ فٹ ٹن۔ اور ہر ایک منفرد بوجھ کے لیے نقشہ ایک مثلث ہوگا جس کی بلندی ان بوجھوں کے لیے علی الترتیب $\frac{۱۶ \times ۴ \times ۳}{۲۰}$ = ۹٫۶ فٹ ٹن، اور $\frac{۱۵ \times ۵ \times ۲}{۲۰}$ = ۷٫۵ فٹ ٹن

اِن تینوں شکلوں کو جوڑنے سے خماؤ کے معیار کا وہ نقشہ حاصل ہوگا جو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اِس کا اعظم معین پیمائش سے ۲۳٫۵ فٹ ٹن پایا جائیگا۔

نوٹ۔ صریحاً ان تمام عملوں میں جن میں نقشوں کو جوڑنا ہو یہ نقشے ایک ہی پیمانے پر کھینچے جانے چاہییں۔

(۲) ۲۴ فٹ فصل کا ایک گرڈر ایک سرے پر سہارا ہوا ہے، اور دوسرے سرے سے ۶ فٹ کے فاصلے پر ایک ستون پر رکھا ہوا ہے۔ گرڈر پر ۶ ٹن کا ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ ہے اور آزاد سرے پر ۲ ٹن کا ایک منفرد بوجھ ہے۔ جزر اور خماؤ کے معیار کے منحنی کھینچو۔

ردِّ عمل معلوم کرنے کے لیے ا کے گرد معیار لو (شکل ۶۱)۔ تب

۱۸ ر~ب~ = ۶ × ۱۲ + ۲ × ۲۴ = ۱۲۰

∴ ر~ب~ = $\frac{۱۲۰}{۱۸}$ = ۶ $\frac{۲}{۳}$ ٹن

∴ ر~ا~ = ۸ − ۶ $\frac{۲}{۳}$ = ۱ $\frac{۱}{۳}$ ٹن

جزر ج پر ۲ ٹن ہوگا اور بڑھتے بڑھتے اُس کی قیمت ب پر ۳٫۵ ٹن ہوگی۔ یہاں ایک دم اس کی علامت بدلتی ہے۔ اور قیمت ۳٫۱۷ ٹن ہو جاتی ہے اور پھر یکساں گھٹتے ہوئے سرے ا پر قیمت ۱٫۳۳ ہوتی ہے۔ جزر کا نقشہ وہ حاصل ہوتا ہے جو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ دار خط سے یہ دکھایا گیا ہے کہ بوجھوں اور ردِّ عملوں کو ریاضیاتی نقطوں پر مرتکز نہ کر سکنے کی وجہ سے عملاً کیا صورت ہوتی ہے۔

پہلے منفرد اور یکساں بوجھوں کے لیے خماؤ کے معیار علٰحدہ علٰحدہ معلوم کریں تو منفرد بوجھ کی وجہ سے خماؤ کے معیار کا منحنی وہ حاصل ہوگا جو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ ب پر خماؤ کا معیار = ۶ × ۲ = ۱۲ فٹ ٹن۔ اب یکساں بوجھ پر غور کرو۔ حصہ ب ج کے لیے نقشہ ایک مکافی ہوگا جس کا راس ج پر ہوگا اور ب۱ پر معین ب۱ د = $\frac{و ل^۲}{۲} = \frac{۱}{۴} \times \frac{۶ \times ۶}{۲} = ۴٫۵$ فٹ ٹن۔ اور ب اور ا کے درمیان اس برآویختہ بوجھ کی وجہ سے خماؤ کے معیار کا منحنی خطِ مستقیم ا د ہوگا کیونکہ اس برآویختہ بوجھ کو سنبھالنے کے لیے ا پر ایک منفرد بوجھ کی ضرورت ہوگی۔

حصہ ا ب کے لیے خماؤ کے معیار کا منحنی ایک مکافی ہوگا جس کا مرکزی ارتفاع = $\frac{و ل^۲}{۸} = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱۸ \times ۱۸}{۸} = ۱۰٫۱۲$ فٹ ٹن۔ دونوں حصّوں کے لیے یکساں بوجھ کا حاصل منحنی سایہ دار مرکزی رقبے سے تعبیر ہوتا ہے۔ منفرد بوجھ اور یکساں بوجھ کے نقشوں کو ملانے سے حاصل خماؤ کے معیار کا منحنی وہ حاصل ہوتا ہے جو دکھایا گیا ہے۔ اعظم خماؤ کا معیار ب پر واقع ہوتا ہے اور ۱۶٫۵ فٹ ٹن ہوتا ہے۔

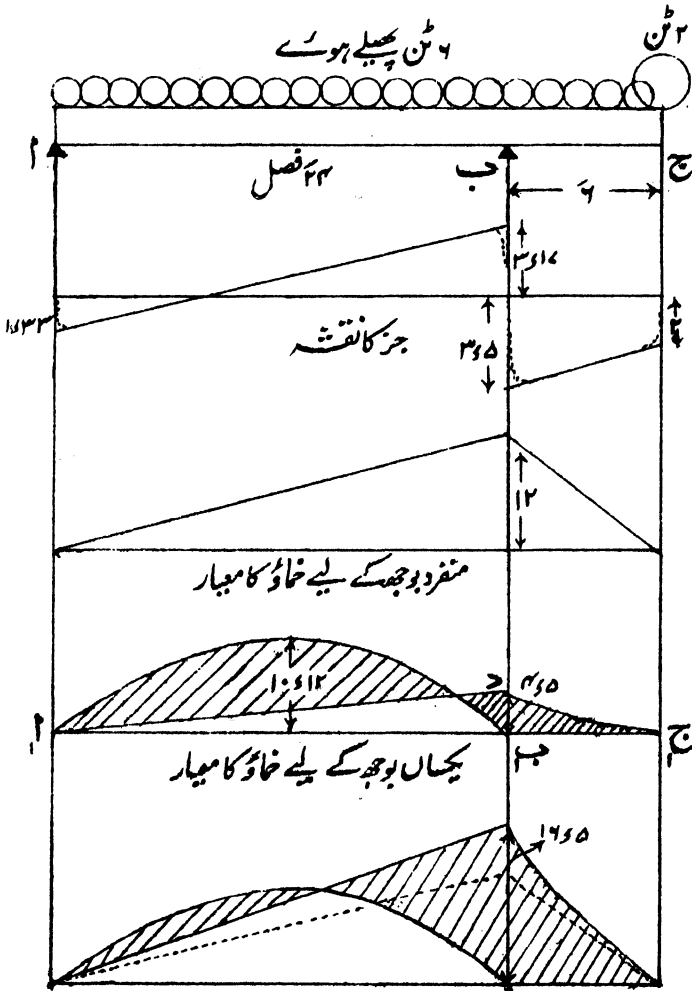
(۳) ۲۰ فٹ فصل کے ایک شہتیر پر $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۴}$، ۱، اور ۲ ٹن کے بوجھ شکل ۲۰ کے مطابق رکھے گئے ہیں۔ اعظم خماؤ کا معیار ترسیماً معلوم کرو۔

خماؤ کے معیار کا منحنی سمتی اور ریسمانی کثیر الاضلاع کے ذریعے معلوم کرو جیسا کہ شکل ۵۵ میں دکھایا گیا ہے۔ مکانی پیمانہ ۱ انچ = ۴ فٹ لو، بوجھ کا پیمانہ ۱ انچ = ۲ ٹن اور قطبی فاصلہ $\frac{۱}{۴}$ انچ۔ تب خماؤ کے معیار کے منحنی کا اعظم معین ۱٫۰۹ انچ دیا جائیگا۔ اس کا پیمانہ ۱ انچ = $\frac{۱}{۴}$ × ۱ × ۴ × ۲ = ۱۰ فٹ ٹن ہوگا۔

∴ اعظم خماؤ کا معیار = ۱۰٫۹ فٹ ٹن

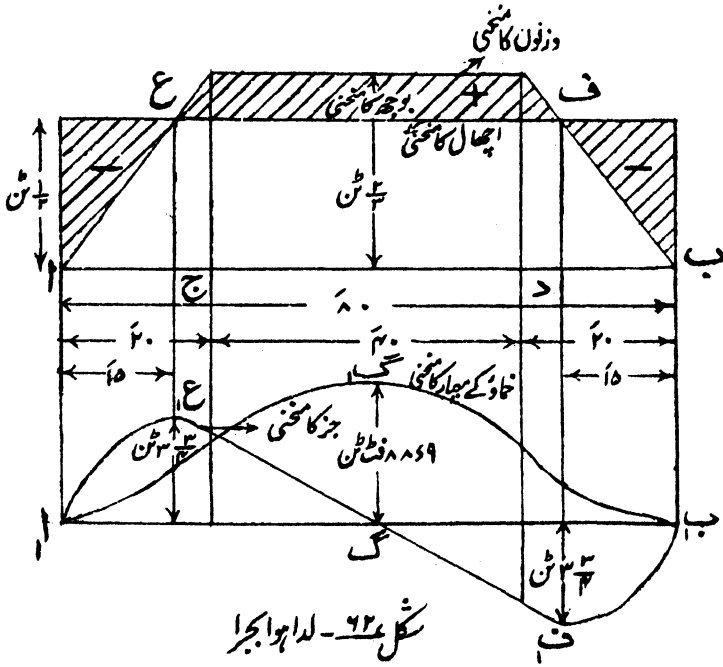
(۴) ایک بجرا ۸۰ فٹ لمبا ہے۔ اس کے اچھال کا منحنی ایک مستطیل ہے اور اس کا ذاتی وزن یکساں پھیلا ہوا ہے۔ اس میں ۴۰ ٹن اینٹیں لادی گئی ہیں اور تمام انتصابی تراشیں منحرف کی شکل میں ہیں جن کے افقی اضلاع ۸۰ اور ۴۰ فٹ طول کے ہیں۔ جز اور

خماؤ کے معیار کے منحنی معلوم کرو۔

اگر بجرے کا اچھال کا منحنی ایک مستطیل ہے اور اس کا ذاتی وزن یکساں پھیلا ہوا ہے تو خود بجرے کے وزن اور اچھال کے منحنی ایک دوسرے کی تعدیل کر دیں گے اور اس وزن کی وجہ سے کوئی جزر یا خماؤ کا معیار نہ پیدا ہوگا۔ لادے ہوئے بوجھ کی وجہ سے اچھال کا منحنی ایک مستطیل ہوگا جس کا ارتفاع ۱/۲ ٹن فی طولی فٹ ہوگا کیونکہ مجموعی بوجھ ۱۰ ٹن ہے۔

مجموعی خماؤ کا معیار

شکل ۶۱

اس طرح وزنوں کا منحنی ایک منحرف ہوگا جس کا رقبہ ۴۰ ٹن کو تعبیر کریگا اور جس کے

شکل ۶۲۔ لدا ہوا بجرا

متوازی اضلاع ۴۰ فٹ اور ۸۰ فٹ کے ہو گئے۔

$$\therefore \quad \text{منحرف کا ارتفاع} = \frac{۴۰}{\frac{۱}{۲}(۴۰+۸۰)} = \frac{۲}{۳} \text{ ٹن فی طولی فٹ}$$

وزنوں اور اُچھال کے منحنیوں کے فرق سے بوجھ کا منحنی حاصل ہوگا جو شکل ۶۲ میں سایہ دار دکھایا گیا ہے۔ پانی سے اُٹھائی ہوئی تراشیں ع، ف سروں سے ۱۵ فٹ کے فاصلوں پر ہیں۔ بوجھ منحنی کا حاصل جمع منحنی لینے سے جزر کا منحنی ا ع گ ف ب حاصل ہوتا ہے اور پھر اس کا حاصل جمع منحنی لینے سے خماؤ کے معیار کا منحنی ا گ ب حاصل ہوتا ہے۔ پیمانے یوں معلوم کیے جا سکتے ہیں:۔
فرض کرو کہ مکانی پیمانہ ۱ انچ = ۱۰ فٹ ہے اور بوجھ کا پیمانہ ۱ انچ = ۱/۴ ٹن فی فٹ ہے۔ تب اگر جزر کا منحنی قطبی فاصلہ ۲ انچ یعنی ۲۰ فٹ کے ساتھ کھینچا جائے تو جزر کا پیمانہ ۱ انچ = ۱/۴ × ۲۰ = ۵ ٹن ہوگا۔ اگر خماؤ کے معیار کا منحنی قطبی فاصلہ ۲ انچ یعنی ۲۰ فٹ کے

ساتھ کھینچا جائے تو خماؤ کے معیار کا پیمانہ ۱ انچ = ۲۰ × ۵ = ۱۰۰ فٹ ٹن ہوگا۔
پایا جائیگا کہ اعظم جز ۳ ۳/۴ ٹن ہے، اور ع اور ف۱ پر ہے، اور اعظم خماؤ کا معیار ۸۰٫۹ فٹ ٹن ہے جو مرکز پر ہے۔
نوٹ۔ شکل میں منحنی پیمانے پر نہیں کھینچے گئے۔

خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے مائل بوجھوں کے لیے

اب تک جتنی صورتوں پر غور کیا گیا ہے ان سب میں لداؤ شہتیر کے طول کے علی القوائم تھا۔ اب ہم چند ایسی صورتوں پر غور کرینگے جن میں ایسا نہیں اور دونوں قسم کی صورتیں لینگے یعنی ایک تو افقی شہتیر اور غیر انتصابی بوجھ اور دوسرے خود شہتیر غیر افقی۔ اِن صورتوں کی خصوصیت یہ ہے کہ اِن میں شہتیر کی سمت میں دھکیل پیدا ہوگا اور جز اور خماؤ کے معیار کے علاوہ دھکیل کا منحنی بھی حاصل ہوگا۔

عام قاعدہ یہ ہے کہ تمام قوتوں کو ردّعملوں سمیت شہتیر کے طول کی سمت میں اور علی القوائم تحلیل کیا جائے۔ شہتیر کے طول کی سمت کی قوتوں سے دھکیل کا منحنی بھی کھینچا جا سکتا ہے اور شہتیر کے علی القوائم قوتوں سے جز اور خماؤ کے معیار کے منحنی معمولی طور پر کھینچے جا سکتے ہیں۔

شہتیر کے کسی نقطے پر دھکیل کی تعریف یہ ہے کہ یہ اس نقطے کے دائیں طرف کی تمام قوتوں کا شہتیر کی سمت میں جزِ تحلیلی ہے۔ خیال رہے کہ اگر دھکیل منفی ہو تو وہ کھینچ بن جاتا ہے۔

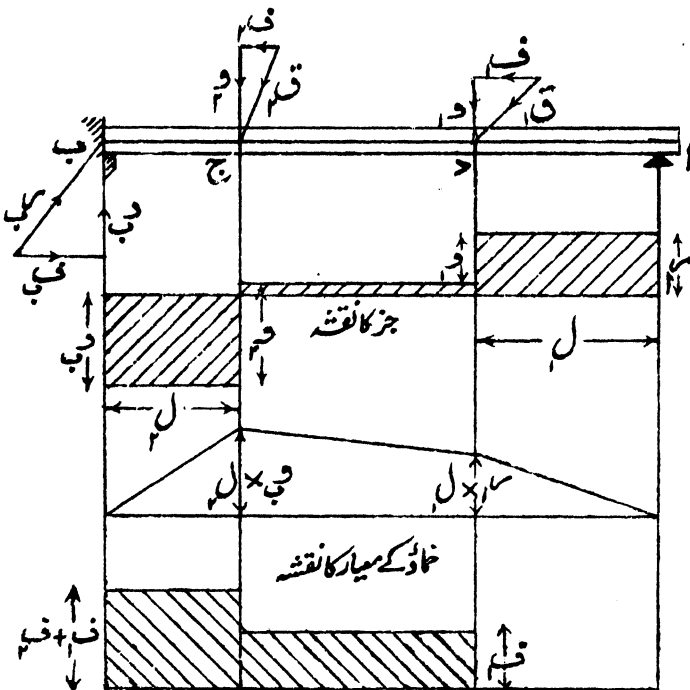
صورت ۱۔ افقی شہتیر، آزادانہ سہارا ہوا، بوجھ مائل ——

فرض کرو کہ ایک شہتیر ا ب پر مائل قوتیں ق۱، ق۲ (شکل ۶۳) عمل کرتی ہیں اور شہتیر کے مرکزی خط کو ج اور د پر ملتی ہیں۔ فرض کرو کہ سرا ا ایک آزاد سہارے پر ٹکا ہوا ہے اور سرا ب آزادانہ سہارا ہوا ہے لیکن طولاً حرکت کرنے سے روک دیا گیا ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اگر ق۱ اور ق۲ کا حاصل سرے ا کی طرف عمل کرتا تو ا کی حرکت کو روکنا پڑتا۔ قوتوں ق۱ اور ق۲ کو

انتصابی اجزائے تحلیلی و۱ اور و۲ اور افقی اجزائے تحلیلی ف۱ اور ف۲ میں تحلیل کرو۔

ر ب مائل ہوگا جس کا انتصابی جزوِ تحلیلی و ب اس طرح حاصل ہوگا کہ قوتوں و۱ اور و۲ پر معمولی طور پر غور کیا جائے۔ اور افقی جزوِ تحلیلی ف ب مساوی ہوگا ف۱ اور ف۲ کے۔

ردِ عمل ر۱ انتصابی ہوگا اور اس طرح حاصل ہوگا کہ قوتوں و۱، و۲ پر معمولی طور پر غور کیا جائے۔

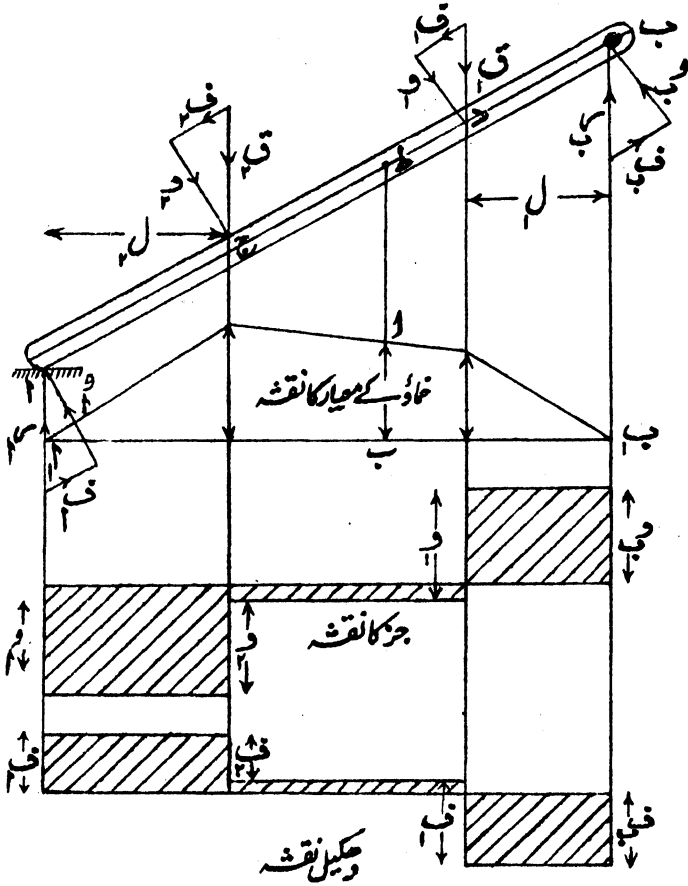
اگر ق۱ اور ق۲ کا حاصل معلوم کیا جائے تو وہ ر۱ اور ر ب کے تقاطع میں سے گزرتا ہوا ہوگا کیونکہ تین متعاول قوتوں کو ایک نقطے میں سے گزرنا لازمی ہے۔

ڈھکیل کا نقشہ

شکل ۶۳۔ مائل بوجھوں کا شہتیر

اب جز اور خماؤ کے معیار کے نقشے معمولی طور پر وزنوں و۱ اور و۲ کے لیے معلوم کیے جاتے ہیں جیسا کہ دکھائے گئے ہیں۔

ڈھکیل کا نقشہ اِس طرح حاصل ہوگا کہ ہر نقطے پر ڈھکیل کی قیمت ترسیم کی جائے اور یہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ یہی طریقہ بوجھوں کی کسی تعداد کے لیے درست ہے۔ یہاں دو بوجھ صرف شکل کی آسانی کے لیے لیے گئے ہیں۔

صورت ۲۔ مائل شہتیر اور انتصابی بوجھ۔ ردِّ عمل متوازی۔

فرض کرو کہ ایک مائل شہتیر ا ب (شکل ۶۴) ا پر آزادانہ سہارا ہوا ہے

شکل ۶۴ - مائل شہتیر جس کا زیریں سرا آزادانہ سہارا ہوا

اور ب پر قبضہ دار ہے۔ تب اگر اس پر انتصابی قوتیں ق_1، ق_2 نقاط ج اور د پر عمل کریں تو ا پر کا اور اس طرح ب پر کا بھی ردِّ عمل انتصابی ہوگا اور ان کی قیمتیں معمولی طریقے پر حاصل ہونگی۔

اب وزنوں اور ردِّ عملوں کو شہتیر کے طول کی سمت میں اور علی القوائم تحلیل کرو جس سے وزن $\text{و}_{\text{ب}}$، و_1، و_2، $\text{و}_{\text{ا}}$ اور ڈھکیل $\text{ف}_{\text{ب}}$، ف_1، ف_2، $\text{ف}_{\text{ا}}$ حاصل ہونگے۔

اب خماؤ کے معیار کے نقشے کو ڈھلواں قاعدے ا ب پر یا اس کے افقی ظل $\text{ا}_1\text{ب}$ پر کھینچ سکتے ہیں۔

$$\text{م}_{\text{د}} = \text{و}_{\text{ب}} \times \text{دب}$$

لیکن
$$\frac{\text{دب}}{\text{ل}_1} = \frac{\text{ح}_{\text{ب}}}{\text{و}_{\text{ب}}}$$

$$\therefore \quad \text{و}_{\text{ب}} \times \text{دب} = \text{ح}_{\text{ب}}\,\text{ل}_1$$

اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ انتصابی ردِّ عملوں کے ڈھلواں شہتیر کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ وہی ہوگا جو اس ڈھلواں شہتیر کے افقی ظل کے مساوی فصل کے افقی شہتیر کا ہوگا۔

مثلاً نقطہ ط پر خماؤ کا معیار اس طرح حاصل ہوگا کہ اس میں سے ایک انتصابی خط کھینچا جائے۔ یہ خماؤ کا معیار ا ب سے تعبیر ہوتا ہے۔

جز اور ڈھکیل کے نقشے وہ حاصل ہونگے جو دکھائے گئے ہیں، اور شکل سے سمجھ میں آجائینگے۔

صورت ۳۔ مائل شہتیر اور انتصابی بوجھ۔ بالائی ردِّ عمل اُفقی

اِس صورت میں پہلے حاصل بوجھ معلوم کرنا چاہیے۔ فرض کرو کہ یہ حاصل خط لا لا میں عمل کرتا ہے (شکل ۶۵)۔ ب پر کا ردِّ عمل $\text{ح}_{\text{ب}}$ اُفقی ہے اس لیے ب لا افقاً کھینچو جو اگر لا لا کو لا پر ملے تو $\text{ح}_{\text{ا}}$ کو

بھی لا میں سے گزرنا چاہیے۔ اِس طرح ا لا کو ملانے سے ر ا کی سمت حاصل ہوگی۔ ر ا اور ر ب کی قیمتیں قوتوں کے مثلث و، ب، ج سے حاصل ہونگی۔

اب پہلے کی طرح وزنوں اور ردِّ عملوں کو ا ب کے طول کی سمت میں اور اس کے علی القوائم تحلیل کرو۔ علی القوائم اجزائے تحلیلی پہلے کے سے ہونگے اور اِس طرح خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے وہی ہونگے جو گزشتہ صورت میں حاصل ہوئے (شکل ۶۴)۔

دھکیل مختلف ہونگے اور وہ ہونگے جو شکل میں دکھائے گئے ہیں۔ شکل آسانی سے سمجھ میں آجائیگی۔

شکل ۶۵۔ مائل شہتیر جس کا بالائی سرا آزادانہ سہارا ہوا

صورت ۴۔ ڈھلواں برآمدہ بیرم — اس کو بھی اسی طرح حل کیا جاتا ہے۔ مثلاً ایک برآمدہ بیرم پر غور کرو جس کا طول ل اور میلان طہ ہے اور جس پر ایک یکساں بوجھ حدت و کا ہے (شکل ۶۵ و)۔ خماؤ کے معیار کا منحنی ایک مکافی ہوگا۔ اس کا اعظم معین $\frac{\text{و ل}^2 \text{ جم طہ}}{2}$ ہوگا، کیونکہ مجموعی وزن و ل ہے اور بیل پایہ سے فاصلہ $\frac{\text{ل جم طہ}}{2}$ پر عمل کرتا ہے۔ جز کا نقشہ ایک ڈھلواں خطِ مستقیم ہوگا اور اعظم جز و ل جم طہ ہوگا۔ ڈھکیل کا نقشہ بھی ایک ڈھلواں خطِ مستقیم ہوگا اور اعظم ڈھکیل و ل جب طہ ہوگا۔

شکل ۶۵ و

ڈھلواں برآمدہ بیرم پر یکساں بوجھ

جز، ڈھکیل، اور خماؤ کے معیار کی عام صورت۔

دباؤ کا خط ۔ اب تک جتنی صورتوں پر غور کیا گیا ان سب میں دیکھا گیا کہ جز، ڈھکیل اور خماؤ کے معیار دریافت کرنے کے لیے پہلے ردِ عملوں کو معلوم کرنا ضروری ہے۔ اب ہم کسی شہتیر یا پسلی پر غور کرینگے جس کا مرکزی خط ا ب ہے اور جس پر اسی مستوی میں قوتوں کا کوئی نظام مثلاً قوتیں $ق_۱$، $ق_۲$، $ق_۳$ (شکل ۶۶) عمل کرتی ہیں، اور فرض کرو کہ ردِ عملوں کی مقدار یا سمت معلوم ہے اور ردِ عمل $ر_۱$ اور $ر_ب$ ہیں۔ پہلے کی طرح قوتوں کے درمیان کے رقبوں کو نمبر لگا کر ایک سمتی شکل ۰، ۱، ۲، ۳، ۷ کھینچو۔

اب ۷ کو قطب مان کر اور پہلی کڑی کو پہلی قوت $ر_ب$ پر منطبق کر کے رسیانی کثیر الاضلاع ب، د، ب، ج، ا کھینچو۔ اگر یہ صحیح کھینچا گیا تو آخری کڑی ردِ عمل $ر_۱$ پر منطبق ہوگی۔ یہ رسیانی کثیر الاضلاع تعمیر کا دباؤ کا خط کہلاتا ہے۔

اب فرض کرو کہ قوتیں $ق_۱$، $ق_۲$، $ق_۳$ تعمیر کے مرکزی خط کو نقاط د، ع وغیرہ پر ملتی ہیں۔

ب اور د کے درمیان کسی نقطہ ط پر کی تراش پر غور کرو۔ اس تراش میں سے جو زور عمل کرینگے وہ تراش کے ہر ایک طرف کی تمام قوتوں کو یعنی قوت $ر_ب$ کو تعادل میں رکھینگے۔ تراش کو خارج کر کے $ر_ب$ کے خطِ عمل سے $ل_۱$ پر ملنے دو۔ یہ نقطہ اس تراش کا بوجھ نقطہ کہلاتا ہے۔

اگر $ر_ب$ کے اجزائے تحلیلی ط ل کے علی القوائم اور متوازی $ص_۱$ اور $س_۱$ ہوں تو نقطہ ط پر جز $س_۱$ کے مساوی ہوگا۔ ڈھکیل $ص_۱$ ہوگا اور خماؤ کا معیار $ص_۱ \times ط ل_۱$ ہوگا۔

اسی طرح د اور ع کے درمیان نقطہ $ط_۲$ پر کی تراش پر غور کرو۔ تراش کے

اوپر کی جانب قوتیں ہب اور ق۱ ہیں۔ اِن کا حاصل لا ا ہے، اور دباؤ کے

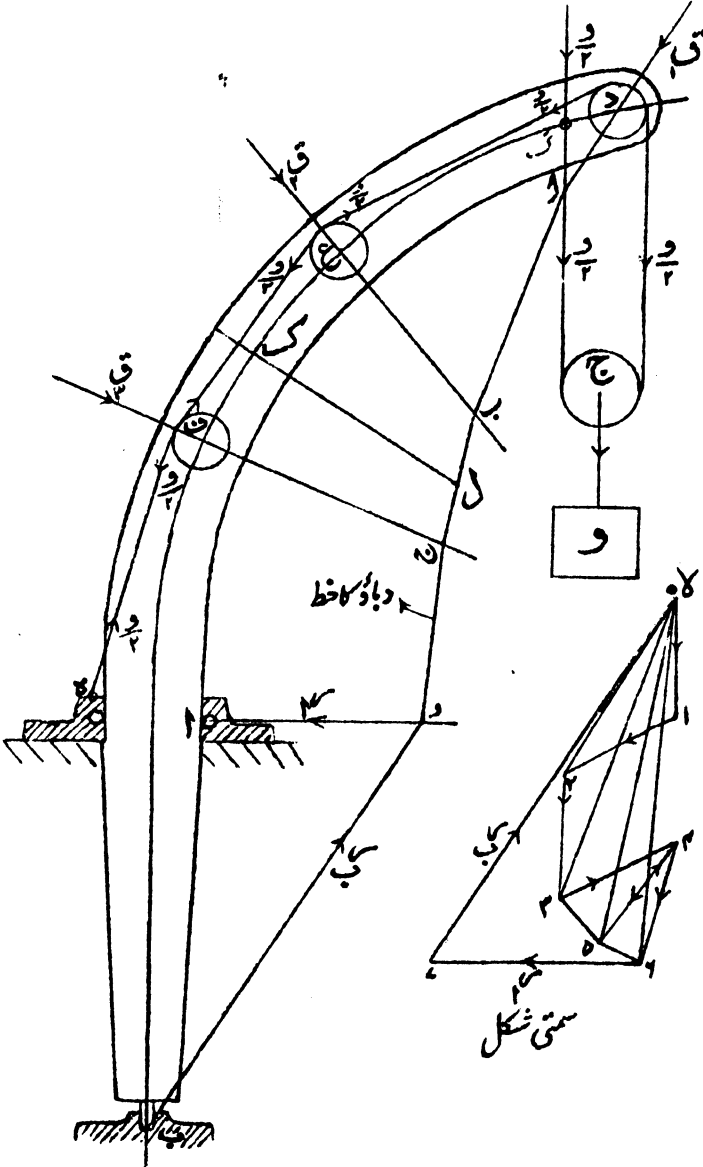
شکل ۶۶۔ دباؤ کا خط

خط ا ب میں عمل کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ط۲ پر کی تراش دباؤ کے خط کے حصہ ا ب یا ا ب مخروجہ کو ل۲ پر ملتا ہے۔ تب ل۲ نقطہ ط۲ پر کی تراش کا بوجھ نقطہ ہوگا۔ اور لا ا کو ط۲ل۲ کے علی القوایم اور متوازی تحلیل کرنے سے جز، دھکیل، اور خماؤ کا معیار پہلے کی طرح حاصل ہونگے۔ یہ عمل ہر تعمیر کے لیے قابلِ استعمال ہے۔ البتہ صرف ایک دِقّت ہے جو اکثر صورتوں میں پیش آتی ہے اور وہ ہم۱ اور ہب کی سمت یا قیمت کا معلوم کرنا ہے۔

دباؤ کے خط سے کمانوں اور چنائی کی عام تعمیروں کی قائمیت میں زیادہ تفصیل کے ساتھ بحث کی جائیگی۔

مثال کے طور پر ایک خمدار حمالہ پر غور کرو جس کو ا پر ایک گوئی

یا پھر کی مسند او ر ب پر کے جوف میں ایک چول لگی ہوئی ہے (شکل ع۶۷)۔
بوجھ و ایک چرخی ج سے لٹکتا ہے جس کو اٹھانے والی زنجیر.

شکل ع۶۷ - دباؤ کا خط حمالہ کے لیے

حمالہ کو نقطہ گ پر ثابت ہے اور چرخیوں د، ع، ف پر سے ہوتی ہوئی حمالہ سے گزر کر رفعی کل کو چلی جاتی ہے۔ اِس زنجیر میں تناؤ $\frac{و}{۲}$ ہوگا۔

اب سمتی شکل کھینچنا شروع کرو۔ اِس طرح کہ ۰، ۱ انتصابی بوجھ $\frac{و}{۲}$ کو تعبیر کرے اور ۱، ۲ کو د اور ع کے درمیان کی زنجیر کے متوازی۔ تب ۲، ۰ سے چرخی د پر کی قوت ق$_۱$ تعبیر ہوگی۔ اس کے بعد انتصابی قوت $\frac{و}{۲}$ ہے جو گ میں سے عمل کرتی ہے۔ اِس لیے ۲، ۳ انتصابی اور $\frac{و}{۲}$ کے مساوی کھینچو۔ پھر ۳، ۴ اور ۴، ۵ مساوی $\frac{و}{۲}$ کے اور علی الترتیب زنجیر د ع اور ع ف کے متوازی کھینچو۔ تب ۳، ۵ مساوی ہوگا ق$_۲$ کے اور اگر ۴، ۶ کو ف اور کا کے درمیان کی زنجیر کے متوازی اور $\frac{و}{۲}$ کے مساوی کھینچا جائے تو ۵، ۶ سے ق$_۳$ تعبیر ہوگا۔

قطب ۷ کو نقطہ ۰ پر لینے اور پہلی کڑی کو ق$_۱$ پر منطبق کرنے سے دباؤ کے خط پر نقطہ ا حاصل ہوگا۔ اب ا ب، ب ج، ج د علی الترتیب متوازی (۳، ۰)، (۵، ۰)، (۶، ۰) کے کھینچو۔ نقطہ د نقطہ ا میں کے افقی خط پر واقع ہوگا کیونکہ پھر کی مسند کی وجہ سے ر$_۲$ افقی ہونا چاہیے۔ اب د کو ب سے ملانے سے ب پر کے ردِّ عمل ر$_ب$ کی سمت حاصل ہوگی اور سمتی شکل پر (۶، ۷) اور (۰، ۷) علی الترتیب ر$_۲$ اور ر$_ب$ کے متوازی کھینچنے سے ردِّ عملوں کی قیمت حاصل ہوگی۔ تب اگر ک حمالہ کے مرکزی خط پر کوئی نقطہ ہو اور اس پر کی تراش کھینچی جائے جو دباؤ کے خط کو ل پر ملے، تو ل بوجھ نقطہ ہوگا اور اگر ۰، ۵ کو ک ل کے متوازی اور علی القوایم تحلیل کرنے سے اجزائے تحلیلی س اور ص حاصل ہوں تو اس تراش پر جزی قوت س ہوگی، دھکیل ص اور خماؤ کا معیار ص × ک ل ہوگا۔

متحرک بوجھوں، ثابت شہتیروں، اور مسلسل شہتیروں کے خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے اور مختلف تعمیروں کے دباؤ کے خط آیندہ ابواب میں ملینگے۔

مختلف قسم کے شہتیروں کے لیے اعظم خماؤ کے معیار اور جز کا ایک خلاصہ صفحہ ۳۷۲ پر ملیگا۔

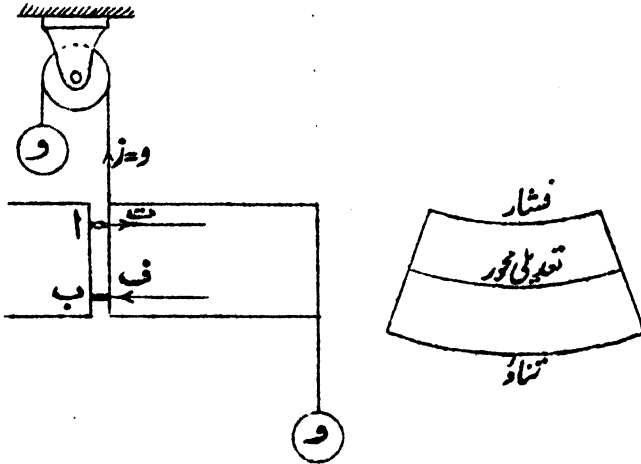
چھٹا باب

شہتیروں کے زور

ہم گزشتہ باب میں دیکھ چکے ہیں کہ ایک شہتیر مختلف طرحوں سے لدا ہوا ہو تو اس کے طول کے مختلف نقاط پر خماؤ کا معیار اور جزی قوت کس طرح معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ اب ہم کو یہ معلوم کرنا ہے کہ ان مقداروں میں اور شہتیر میں پیدا ہونے والے زوروں میں کیا ربط ہوتا ہے۔

شہتیروں میں پیدا ہونے والے زوروں کا ایک اچھا تصور پروفیسر پیری[ل] کے بنائے ہوئے ایک نمونے پر غور کرنے سے حاصل ہوگا۔ فرض کرو کہ ایک شہتیر ایک سرے پر ثابت ہے اور اس کے دوسرے سرے پر ایک وزن و ہے (شکل ۶۸)، اور شہتیر کو ایک خاص تراش پر کاٹ دیا گیا ہے۔ تب دائیں حصے کو اس طرح تعادل میں رکھ سکتے ہیں کہ اس کے اوپر ایک رسی کو باندھ کر چرخی پر سے گزاریں اور اس کے دوسرے سرے سے ایک وزن و لٹکائیں اور تراش کے نچلے حصے کو ایک کندہ ب لگائیں اور بالائی حصے کو ایک زنجیر ا۔ تب رسی کا تناؤ جزی قوت کا مقابلہ کرے گا اور کندہ ب ایک فشاری قوت ف کو اور زنجیر ا ایک تنشی قوت ت کو

ل Prof: Perry

برداشت کریگی۔ چونکہ افقی قوتیں بس یہی ہیں۔ اس لیے یہ مساوی اور مخالف ہونگی اور اس طرح ان سے ایک جفت بنیگا۔ اور اس جفت کا معیار اُس

شکل ۶ء۱۔ شہتیروں کے زور

جفت کے مساوی اور مخالف ہونا چاہیے جو لداؤ کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے اور جس کو خماؤ کے معیار کا نام دیا گیا ہے۔

کسی حقیقی شہتیر میں جو انصراف واقع ہوگا اس کی وجہ سے ایک پہلو کا مادّہ کھنچیگا اور دوسرے پہلو کا سکڑیگا۔ اِس طرح دونوں پہلوؤں کے درمیان کسی مقام پر مادّہ بالکل بے فساد رہیگا اور شہتیر کی تراش میں جس محور پر فساد صفر ہوتا ہے اس کو **تعدیلی محور** (ت۔م) کہتے ہیں۔ اس طرح دیکھو:۔

تعدیلی محور شہتیر کی تراش کا وہ خط ہے جس پر فساد واقع نہیں ہوتا اور اس طرح زور بھی واقع نہیں ہوتا۔

شہتیر کے رُوکار میں بھی صفر فساد اور زور کا ایک خط ہوگا جس کو بھی ایک تعدیلی محور کہا جا سکتا ہے۔ یہ دونوں محور دراصل ایک تعدیلی سطح کے نقش ہیں۔

اگر ہم کو یہ معلوم ہو جائے کہ تعدیلی محور سے شہتیر کے بیرونی پہلو تک فساد کس طرح بدلتا ہے تو چونکہ ہم کو زور اور فساد کا ربط معلوم ہے اور یہ معلوم ہے کہ مجموعی فشاری زور مجموعی تنشی زور کے مساوی ہونا چاہیے اور ان کے جفت کا معیار خماؤ کے معیار کے مساوی ہونا چاہیے اس لیے ہم کو شہتیر کے مختلف نقاط پر زور معلوم ہو جائینگے۔ زوروں کے جفت کا معیار اکثر مزاحمت کا معیار کہا جاتا ہے۔

معمولی شہتیر کے نظریے کے مفروضات ــــ شہتیروں کے خماؤ کے متعلق ہم پہلے ذیل کے مفروضات بیان کرینگے اور پھر ان مفروضات سے اس اعظم زور میں جو کسی تراش میں خماؤ سے پیدا ہو اور خماؤ کے معیار میں ربط معلوم کرینگے:۔

(ا) یہ کہ زیر غور شے میں زور، فساد کے تمناسب ہے اور یہ کہ ینگ کا مقیاس (ے) تناؤ اور فشار کے لیے ایک ہی ہے۔

(ب) یہ کہ شہتیر کی جو تراش شہتیر کی خمیدگی سے پہلے مستوی ہو خمیدگی کے بعد بھی مستوی رہتی ہے۔

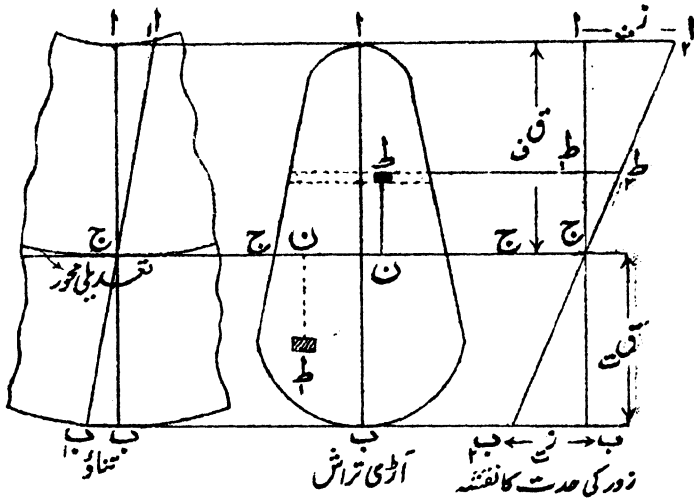
(ج) یہ کہ شہتیر کا ابتدائی نصف قطر انحنا اس کے تراشی ابعاد کے مقابلے میں بہت بڑا ہے۔

نیز فی الحال ہم بحث کو سادہ خماؤ تک محدود رکھینگے، یعنی اُس صورت تک جس میں حسب ذیل شرائط پوری ہوتی ہیں:۔

(۱) شہتیر کی تراش پر کوئی حاصل دھکیل یا کھینچ نہیں۔

(۲) شہتیر کی تراش اپنے مرکز ہندسی میں سے گزرنے والے اُس محور کے گرد متشاکل ہے جو اُس مستوی کے متوازی ہے جس میں خماؤ واقع ہوتا ہے۔

شہتیروں کے زوروں کا صحیح اندازہ حاصل کرنے کے لیے یہ بالکل ضروری ہے کہ کسی خاص نظریے کی بحث میں جو مفروضات شریک ہوتے ہیں اُن کے صحیح مفہوم اور نتائج پر اِن مفروضات کا جو اثر ہوتا ہے وہ ذہن نشین ہو۔

فرض کرو کہ ا ب (شکل ع ۶۹) ایک ایسے شہتیر کی تراش کو تعبیر

شکل ع ۶۹۔ شہتیروں کے زور

کرتا ہے جو خم ہو چکا ہے (خمیدگی کی مقدار شکل میں مبالغے کے ساتھ دکھائی گئی ہے)۔ خمیدگی سے پہلے خط ا ب کا محل ا۱ ب۱ تھا۔ اِس طرح ب ب۱ اعظم تنشی فساد کو اور ا ا۱ اعظم فشاری فساد کو تعبیر کرتا ہے۔ ہمارے مفروضہ (ب) کی رُو سے جو برنولی کا مفروضہ کہلاتا ہے ا۱ ب۱ اور ا ب دونوں خطوطِ مستقیم ہونگے۔ تعدیلی محور صفر فساد کے نقطہ ج میں سے گزریگا اور اوپر کے مفروضوں سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ فساد تعدیلی محور سے فاصلے کے متناسب ہونگے۔ مفروضہ (ر) سے حاصل ہوتا ہے کہ زور کی حدت کا نقشہ بھی ایک خطِ مستقیم ا۲ ب۲ ہوگا اور ب۲ ج اور ج ا۲ ایک سیدھ میں ہونگے کیونکہ ینگ کا مقیاس تناؤ اور فشار میں ایک ہی ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ فشار اور تناؤ کے اعظم زور نقاط ا اور ب پر ہونگے۔ فرض کرو کہ یہ علی الترتیب زف اور زت ہیں، اور فاصلے ا ج اور ب ج علی الترتیب قف اور قت ہیں۔

تعدیلی محور کا محل — تعدیلی محور سے فاصلہ ط ن پر نقطہ ط پر کے ایک چھوٹے سے رقبے ب پر غور کرو۔ ط پر زور ط۱ ط۲ ہوگا۔

لیکن (ط۱ ط۲) / (ط۱ ج) = (ا۱ ا۲) / (ا۱ ج) = (ن ف) / (ق ف)

∴ ط۱ ط۲ = (ن ف) / (ق ف) × ط۱ ج

= (ن ف) / (ق ف) × ط ن

∴ اس چھوٹے رقبے پر زور = ب × (ن ف) / (ق ف) × ط ن

∴ تراش کے اس پورے رقبے پر زور جو تعدیلی محور کے اوپر ہے

= Σ ب × (ن ف) / (ق ف) × ط ن

= (ن ف) / (ق ف) Σ ب × ط ن

= (ن ف) / (ق ف) × تعدیلی محور کے اوپر کے رقبے کا پہلا معیار تعدیلی محور کے گرد۔

اسی طرح ایک نقطہ ط۱ پر کے چھوٹے رقبے پر غور کرنے سے حاصل ہوگا کہ

تعدیلی محور کے نیچے تراش پر مجموعی زور

= (ن ت) / (ق ت) × تعدیلی محور کے نیچے کے رقبے کا پہلا معیار تعدیلی محور کے گرد۔

لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ مجموعی تناؤ ت مجموعی فشار ف کے مساوی

ہونا چاہیے، اور مفروضات (ا) اور (ب) سے لازم آتا ہے کہ

$$\frac{نف}{قف} = \frac{نت}{قت}$$

اس لیے لازم آتا ہے کہ تعدیلی محور کے گرد تعدیلی محور کے اوپر اور نیچے کے رقبوں کے معیار مساوی اور مختلف العلامت ہونگے یعنی تعدیلی محور کے گرد تراش کے پورے رقبے کا مجموعی پہلا معیار صفر ہو۔ لیکن ہم کو معلوم ہے کہ کسی رقبے کا پہلا معیار ایسے خط کے گرد صفر ہوتا ہے جو مرکزِ ہندسی میں سے گزرے۔

اِس لیے سادہ خم میں اختیار کردہ مفروضات کے تحت، تعدیلی محور مرکزِ ہندسی میں سے گزریگا۔

مزاحمت کا معیار ——— (م - م)۔ ہم نے ثابت کیا ہے کہ کسی نقطہ ط پر کے چھوٹے رقبے پ پر زور ب × $\frac{نف}{قف}$ × طن ہوتا ہے۔

ت۔ م کے گرد اِس زور کا معیار

$$= زور \times طن$$

$$= ب \times \frac{نف}{قف} \times طن^{۲}$$

∴ تراش پر کے تمام زوروں کا مجموعی معیار

$$= \Sigma\, ب \times \frac{نت}{قت} \times طن^{۲}$$

$$= \frac{نف}{قف}\, \Sigma\, (ب \times طن^{۲})$$

$= \frac{ن_ف}{ق_ف} \times$ (ت ۔ م کے گرد پورے رقبے کا دوسرا معیار)

$= \frac{ن_ف}{ق_ف} \times آ$

لیکن تمام زوروں کا مجموعی معیار اُس جفت کا معیار ہے جو مزاحمت کا معیار کہلاتا ہے۔ اس لیے دیکھو

$$م ۔ م = \frac{ن_ف}{ق_ف} \times آ \quad یا \quad \frac{ن_ت}{ق_ت} \times آ$$

اور یہ پہلے دکھایا جا چکا ہے کہ مزاحمت کا معیار خماؤ کے معیار کے مساوی ہونا چاہیے جسے ہم صرف م سے تعبیر کرینگے۔

اِس طرح $م = \frac{ن_ف}{ق_ف} \times آ \quad یا \quad \frac{ن_ت}{ق_ت} \times آ$ .... (۱)

اب دیکھو آ، $ق_ف$، اور $ق_ت$ صرف تراش کی شکل پر منحصر ہیں، اور $\frac{آ}{ق_ف}$ اور $\frac{آ}{ق_ت}$ کو تراش کا علی الترتیب فشاری مقیاس اور تنشی مقیاس کہتے ہیں اور حروف $مق_ف$ اور $مق_ت$ سے تعبیر کرتے ہیں۔

اِس طرح ہم کو یہ ربط حاصل ہوتا ہے

$$م = ن_ف \, مق_ف = ن_ت \, مق_ت \quad .... (۲)$$

عملاً ہم کو $ن_ف$ اور $ن_ت$ مطلوب ہونگے جو کہ تراش پر کے اعظم زور کو تعبیر کرتے ہیں۔ اِس لیے ہم اس ربط کو یوں لکھینگے :-

$$ز_ق = \frac{م}{مق_ق} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

$$ز_ت = \frac{م}{مق_ت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

جس صورت میں کہ تراش ت۔م کے گرد متشاکل ہو $ق_ق$ اور $ق_ت$ مساوی ہونگے اور اِس طرح $مق_ق$ اور $مق_ت$ مساوی ہونگے۔ اِس صورت میں $ز_ق = ز_ت$ اور اوپر کے ربط کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$ز = \frac{م}{مق}$$

عددی مثالیں

ذیل کی عددی مثالوں سے واضح ہوجائیگا کہ شہتیر معلومہ طور پر لدے ہوئے ہوں تو ان میں زور کس طرح معلوم کیے جاسکتے ہیں اور ایک دیے ہوئے فصل اور تراش کے شہتیر کے لیے بے خطر بوجھ کس طرح معلوم کیا جاسکتا ہے۔

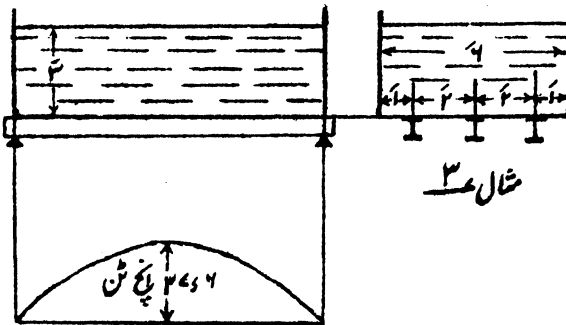
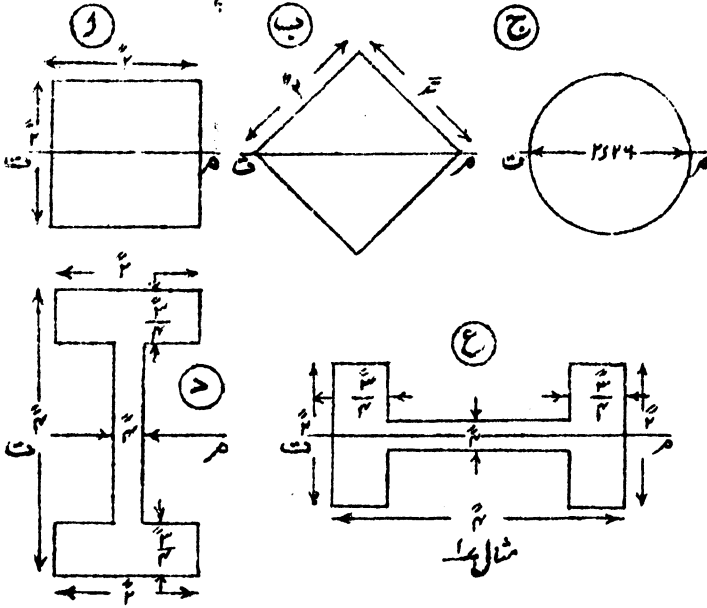
(۱) شکل ۷-۷ میں دی ہوئی پانچ تراشوں ا، ب، ج، د، ع میں سے ہر ایک کا رقبہ ۴ مربع انچ ہے۔ اگر شہتیر ایک ہی فصل کے اور ایک ہی شے کے ہوں تو اِن تراشوں کی مضبوطیوں کا مقابلہ کرو۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ م = ز مق۔ اب اگر سب شہتیر ایک ہی طور پر لدے ہوئے ہوں تو م اُن کے بوجھ کے متناسب ہوگا اور چونکہ ز ہر ایک کے لیے ایک ہی ہے اس لیے ان تراشوں کے شہتیروں کی اضافی مضبوطیاں ان تراشوں کے مقیاسوں کے متناسب ہونگی۔ دوسرے معیاروں کی جدول کے لیے دیکھو صفحہ ۱۰۱

تراش ا

$$آ = \frac{ض ھ^۳}{۱۲} = \frac{۲ \times ۲^۳}{۱۲}$$

$$مق = \frac{آ}{ق} = \frac{آ}{ا}$$

$$\therefore مق = \frac{۲^{۳} \times ۲}{۱ \times ۱۲} = \frac{۸ \times ۲}{۱۲} = ۱٫۳۳ \text{ انچ اکائیاں}$$

شکل ۸۵ - شہتیروں کی مثالیں

تراش ب ۔ یہ دو مثلثوں سے مرکب ہے۔

$آ = ۲ \times \frac{ض ع^۳}{۱۲}$ (ع اس صورت میں مثلث کا ارتفاع ہے)

$\therefore\ آ = \frac{(۱٫۴۱۴)^۳ \times ۲٫۸۲۸ \times ۲}{۱۲}$

$ق = ۱٫۴۱۴$

$\therefore\ مق = \frac{(۱٫۴۱۴)^۳ \times ۲٫۸۲۸ \times ۲}{۱۲ \times ۱٫۴۱۴} = \frac{۲٫۸۲۸}{۳}$

$= ٫۹۴۳$ انچ اکائیاں

تراش ج —

$آ = \frac{\pi ق^۴}{۶۴} = \frac{\pi \times (۲٫۲۶)^۴}{۶۴}$

$ق = ۱٫۱۳$

$\therefore\ مق = \frac{\pi \times (۲٫۲۶)^۴}{۶۴ \times ۱٫۱۳} = ۱٫۱۳$ انچ اکائیاں

تراش د —

$آ = \frac{۲ \times (۴)^۳}{۱۲} - \frac{۲ \times ٫۸ \times (۲٫۵)^۳}{۱۲}$

$= ۱۰٫۶۷ - ۲٫۰۸ = ۸٫۵۹$

$ق = \frac{۴}{۲}$

$\therefore\ مق = \frac{۸٫۵۹}{۲} = ۴٫۲۹$ انچ اکائیاں

تراش ع ۔ یہ تین مستطیلوں سے مرکب ہے۔

$آ = \frac{٫۷۵ \times (۲)^۳}{۱۲} + \frac{۲٫۵ \times (٫۴)^۳}{۱۲} + \frac{٫۷۵ \times (۲)^۳}{۱۲}$

$= ٫۵ + ٫۰۱۳ + ٫۵$

= ۱۰۰۱۳
ق = أ
∴ مق = ۱۰۰۱۳ انچ اکائیاں

اس طرح دیکھو تراشوں کی ترتیب مضبوطی کے لحاظ سے د، ا، ج، ع، ب ہے۔ یعنی تراش د مضبوط ترین ہے پھر ا وغیرہ۔

اس کو بطور ایک قاعدہ کلیہ کے یاد رکھو کہ ایک دی ہوئی تراش کا مضبوط ترین شہتیر وہ ہے جس کی گہرائی اتنی زیادہ ہو جتنی کہ ممکن ہے اور جس میں مادے کی ممکنہ مقدار باہر کی جانب مرتکز ہے۔

(۲) ۲۰ فٹ فصل کے ایک گرڈر پر ۱۰ ٹن کا ایک پھیلا ہوا بوجھ اور ۴ ٹن کا ایک مرکزی بوجھ ہے۔ اس کے لیے ایک موزوں برطانوی معیاری شہتیری تراش معلوم کرو جس میں اعظم زور ۷ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو۔

اعظم خماؤ کا معیار یکساں بوجھ کی وجہ سے $\frac{و ل}{۸}$ ہوگا (دیکھو شکل ۵۴ صورت ۲، ۳) یعنی

= $\frac{۱۲ \times ۲۰ \times ۱۰}{۸}$ انچ ٹن

= ۳۰۰ انچ ٹن

اعظم خماؤ کا معیار مرکزی بوجھ کی وجہ سے = $\frac{و ل}{۴}$

= $\frac{۱۲ \times ۲۰ \times ۴}{۴}$

= ۲۴۰ انچ ٹن

یہ دونوں ایک ہی مقام پر واقع ہونگے اس لیے دونوں بوجھوں کی وجہ سے اعظم خماؤ کا معیار = ۵۴۰ انچ ٹن

اب م = ز مق

∴ ۵۴۰ = ۷ مق

یعنی مق = $\frac{۵۴۰}{۷}$ = ۷۷٫۱۴ انچ اکائیاں

معیاری تراشوں کی جدول سے (جو درج ضمیمہ ہے) معلوم ہوگا کہ جس تراش کا مقیاس اس سے قریب ترین ہے وہ ۱۴ × ۶ × ۵۷ پونڈ والی تراش ہے جس کے لیے مق = ۶۷٫۱۲ اور یہ تراش کافی مضبوط ہے۔

(۳) ایک ٹانکی جس کا وزن ½ ٹن اور ناپ ۱۰ × ۶ × ۳ سے پانی سے بھری ہوئی ہے اور تین گرڈروں پر رکھی ہوئی ہے جو طولاً رکھے گئے ہیں اور اس طرح ہر ایک گرڈر پر مساوی وزن پڑتا ہے۔ اگر گرڈر ۶ × ۳ × ۱۲ پونڈ والے معیاری شہتیر ہوں تو ہر ایک میں اعظم زور معلوم کرو۔ (اے۔ ایم۔ آئی۔ سی۔ ای فروری سنہ ۱۹۰۳ء خفیف سی تبدیلی کے ساتھ)۔

ٹانکی میں پانی کا وزن = $\frac{62.5 \times 3 \times 6 \times 10}{2240}$ ٹن

= ۵٫۰۲ ٹن

∴ گرڈروں پر مجموعی وزن = ۵٫۰۲ + ۵٫ = ۵٫۵۲ ٹن

∴ ہر ایک گرڈر پر اعظم خماؤ کا معیار = $\frac{5.52}{3} \times \frac{12 \times 10}{8}$

= ۲۷٫۶ انچ ٹن

۶ × ۳ × ۱۲ پونڈ والے شہتیر کے لیے مق = ۶٫۳۶ انچ اکائیاں

∴ ز = $\frac{27.6}{6.36}$ = ۴٫۱ ٹن فی مربع انچ

(۴) ایک ڈھلے لوہے کا شہتیر مقلوب T کی شکل کا ہے جس کی مجموعی گہرائی ۹ انچ، کور کی چوڑائی ۶ انچ، اور ریڑھ اور کور کی موٹائی ۱ انچ ہے۔ اگر شہتیر کا طول ۱۲ فٹ ہو تو معلوم کرو کہ کس مرکزی بوجھ سے کور میں ۱ ٹن فی مربع انچ کا تنشی زور پیدا ہوگا۔ اس وقت اعظم فشاری زور کیا ہوگا (اے۔ ایم۔ آئی۔ سی۔ ای اکتوبر سنہ ۱۹۰۲ء)۔

پہلے تراشش کا مرکزِ ہندسی اور دوسرا معیار معلوم کرو (دیکھو شکل ۱۱۱)۔

تراش کا رقبہ = ب = ۹×۱ + ۵×۱ = ۱۴ مربع انچ

قاعدے کے گرد پہلا معیار = ب ق = (۹×۱) × ۹/۲ + ۲(۱/۲ + ۲×۱) × ۱/۲

= ۴۰٫۵ + ۲٫۵ = ۴۳

∴ ق = ۴۳/۱۴ = ۳٫۰۷ انچ

قاعدے کے گرد دوسرا معیار = آ~ب~ = ۱×(۹)^۳/۳ + ۲×۱/۲×(۱)^۳/۳

= ۲۴۳ + ۱٫۶۷ = ۲۴۴٫۶۷

∴ مرکزِ ہندسی میں سے گزرنے والے متوازی خط کے گرد دوسرا معیار

= آ~ج~ = آ~ب~ − ب ق^۲

= ۲۴۴٫۶۷ − ۱۴ × (۳٫۰۷)^۲

= ۲۴۴٫۶۷ − ۱۳۲٫۰۷

= ۱۱۲٫۶ انچ اکائیاں

مق~ت~ = ۱۱۲٫۶/(۹ − ۳٫۰۷) = ۱۱۲٫۶/۵٫۹۳

= ۱۸٫۹۹ انچ اکائیاں

مق~ت~ = ۱۱۲٫۶/۳٫۰۷ = ۳۶٫۶۷ انچ اکائیاں

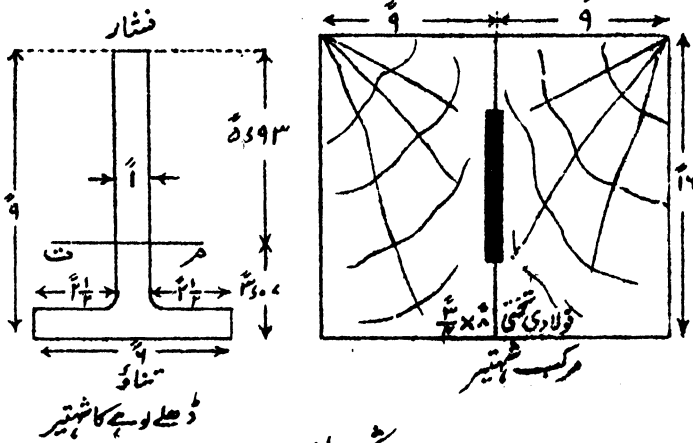
∴ تناؤ کے لحاظ سے بے خطر خماؤ کا معیار = نِ~ت~ × مق~ت~ = ۳۶٫۶۷ انچ ٹن

اگر مرکزی بوجھ و ہو تو شہتیر کے ذاتی وزن کو نظر انداز کرنے پر اعظم خماؤ کا معیار و ل/۴ ہوگا۔

∴ اعظم خماؤ کا معیار = و ل/۴ = و × ۱۲ × ۱۲/۴ = ۳۶ و انچ ٹن

$$\therefore \text{و} = \frac{۳۶٫۶۷}{۳۶} = ۱٫۰۲ \text{ ٹن}$$

شکل ۱۰۷

$$\text{فشاری زور} = \frac{\text{ز}_\text{ت} \times \text{قن}}{\text{قت}} = \frac{۱ \times ۵٫۹۳}{۳٫۰۷}$$

$$= ۱٫۹۳ \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

(۵) ایک مرکب شہتیر دو چوبی شہتیروں سے مرکب ہے جن میں سے ہر ایک کی چوڑائی ۹ انچ اور گہرائی ۱۶ انچ ہے اور ان کے درمیان ایک فولادی تختی ۸ انچ گہری اور $\frac{۳}{۴}$ انچ موٹی متشاکلاً رکھ دی گئی ہے۔ اگر سے کی قیمت چوبینے کے لیے ۱٫۵ ملین پونڈ فی مربع انچ اور فولاد کے لیے ۳۰ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ ہو تو فولادی تختی میں اعظم تنشی زور معلوم کرو جب کہ چوبینے میں اعظم تنشی زور ۱۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہو۔

نیز چوبینے کے آسی زور کی حدات کے لیے معلوم کرو کہ شہتیر کو

مرکب کرنے سے غیر مرکب شہتیر کے مقابلے میں کتنے فی صدی زیادہ بوجھ برداشت ہوسکتا ہے (بی۔ ایس۔ سی لندن ۱۹۰۷ء)۔

صفحہ ۱۰۴ پر دی ہوئی ترقیم اختیار کرنے سے $م = \frac{۳۰ \times ۱۰^{۶}}{۱.۵ \times ۱۰^{۶}} = ۲۰$ (دیکھو شکل ۱۷۱)۔

∴ فولادی تختی ایک ۲۰ گنی چوڑی یعنی $۱۵'' \times ۸''$ چوبی تختی کے معادل ہے۔

اس لیے پورے مرکب شہتیر کی معادل چوبی تراشش کے لیے

$$آ_۲ = \frac{۱۶^{۳} \times ۹ \times ۲}{۱۲} + \frac{۸^{۳} \times (۱۵ - \frac{۳}{۴})}{۱۲}$$

$$= ۶۱۴۴ + ۶۰۸$$

$$= ۶۷۵۲ \text{ انچ اکائیاں}$$

اور بے استحکام چوبی شہتیر کے لیے $آ = ۶۱۴۴$

جب کہ لکڑی میں زور تراش کے کنارے پر ۱۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہوتا ہے تو مرکز سے ۴ انچ نیچے یعنی معادل چوبی تختی کی اعظم گہرائی پر زور

$$\frac{۴}{۸} \times ۱۰۰۰ = ۵۰۰ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

ہوگا۔ لیکن ایک ہی فساد پر فولاد کا زور لکڑی سے ۲۰ گنا ہوتا ہے۔

∴ فولاد میں زور $= ۲۰ \times ۵۰۰ = ۱۰۰۰۰$ پونڈ فی مربع انچ

مرکب شہتیر کے لیے معادل مقیاس $\frac{۶۷۵۲}{۸} = ۸۴۴$ انچ اکائیاں

∴ بے خطر خماؤ کا معیار پونڈ فٹوں میں $= \frac{۱۰۰۰ \times ۸۴۴}{۱۲} = ۷۰۳۳۳$

سادہ چوبی شہتیر کے لیے مق $= \frac{۶۱۴۴}{۸} = ۷۶۸$ انچ اکائیاں

∴ بے خطر خماؤ کا معیار پونڈ فٹوں میں $= \frac{۱۰۰۰ \times ۷۶۸}{۱۲} = ۶۴۰۰۰$

∴ مزید خماؤ کا معیار جو مرکب شہتیر برداشت کرتا ہے $= ۶۳۳۳$

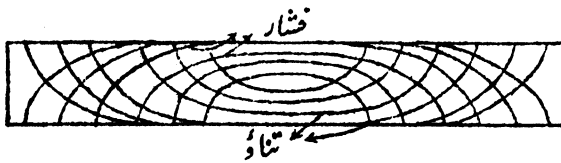
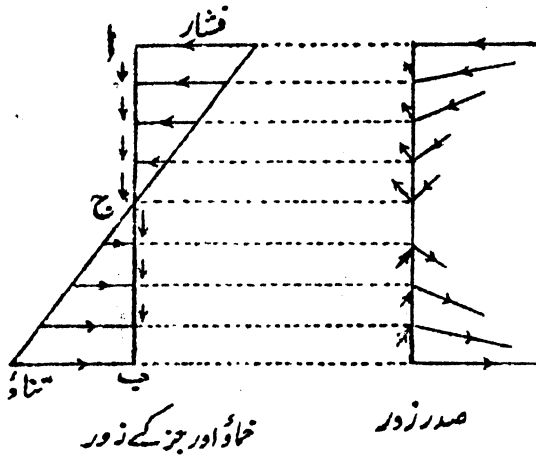
∴ اضافہ فی صدی $= \frac{۶۳۳۳}{۶۴۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۹.۹$ فی صدی

شہتیروں کے زوروں کے متعلق عددی مثالیں اس کتاب میں اور متعدد مقامات پر دی جائینگی۔

شہتیروں کے زوروں پر جزی قوت کا اثر ــــ دیکھو

اب تک ہم نے صرف اُن تنشی اور فشاری زوروں پر غور کیا ہے جو خماؤ کے معیار سے پیدا ہوتے ہیں۔ لیکن ان زوروں کے علاوہ مماسی زور بھی ہوتے ہیں جو جزی قوت سے پیدا ہوتے ہیں۔ شہتیر کے کسی اندرونی نقطے پر حاصل زور اِن راست اور مماسی زوروں کا حاصل یا صدر زور ہوتا ہے۔ اِس حاصل کو معلوم کرنے کا طریقہ باب ا میں دیا گیا ہے۔ ایک آیندہ باب میں ہم شہتیر کی تراش پر جزی زور کی تقسیم سے بحث کرینگے لیکن فی الحال یہ مان لینگے کہ جزی زور مرکز ہندسی پر اعظم ہوتا ہے اور انتہاؤں پر صفر ہوتا ہے۔ شکل ۶-۲ میں شہتیر کی تراش پر جزی اور راست زوروں کا نقشہ دیا گیا ہے اور حاصل زور بھی دکھائے گئے ہیں جو دیکھو شہتیر کی انتہاؤں پر مرکزی خط کے متوازی ہیں اور مرکز ہندسی پر اس کے علی القوائم ہیں۔

اگر فصل کے مختلف نقاط پر کی تراشوں میں مختلف گہرائیوں پر صدر زور معلوم کیے جائیں اور صدر زور کی سمتوں کو ایک منحنی کے ذریعے ملا یا جائے تو مختلف خطوط حاصل ہونگے جن سے پتہ چلیگا کہ صدر زور کی سمت نقطہ بہ نقطہ کس طرح بدلتی ہے۔ اس طرح کے منحنی رِنکین کی اطلاقی میکانیات میں ملینگے۔ ان کی شکل شکل ۶-۲ کے مطابق ہوگی۔

عملاً یہ پایا جائیگا کہ ایسے شہتیروں کو چھوڑ کر جو بہت چھوٹے ہوں اور اِن پر بھاری بوجھ ہوں عام طور پر خماؤ کے معیار سے پیدا ہونے والے اعظم تنشی اور فشاری زور اعظم جزی زور سے بہت بڑھے

شکل ۷۲۔ شہتیروں کے صدر زور

ہوئے ہونگے۔ اِس طرح بالعموم خماؤ کے معیار سے پیدا ہونے والے زوروں کی بحث جزی زوروں سے زیادہ اہم ہوتی ہے۔

ایسی صورتیں جن میں شہتیر کے نظریے کے مفروضات جائز نہیں۔

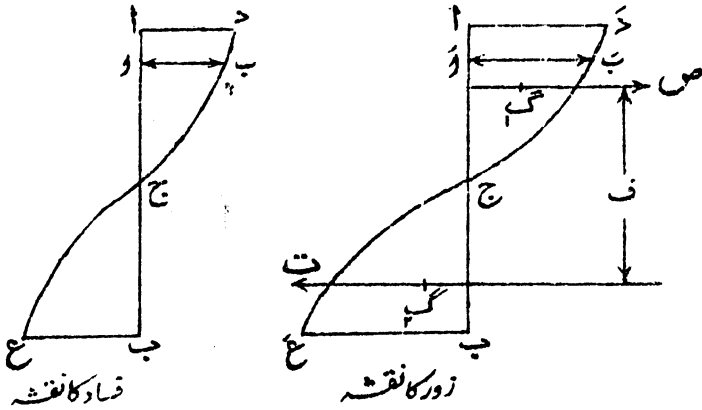
مزاحمت کا معیار عام صورت میں — شہتیروں کے صحیح نظریہ کو قائم کرنے کے لیے یہ ضروری نہیں کہ اوپر بیان کیے ہوئے مفروضات اختیار کیے جائیں اور ہم اب سب میں عام صورت میں مزاحمت کا معیار معلوم کرینگے۔

اس کی تحقیق میں ہم کو یہ فرض کرنا ہوگا کہ تجربے کے ذریعے یا اور کسی طرح معلوم ہے کہ شہتیر کی کسی تراش نے جو ابتدا میں مستوی تھی بگاڑ کے بعد کیا شکل اختیار کی ہے۔ اور یہ بھی معلوم رہنا چاہیئے کہ شہتیر جس شے کا بنا ہوا ہے اس کے لیے زور اور فساد میں کیا ربط ہے۔

فرض کرو کہ ا ب (شکل ۱۳۷) ایک شہتیر کی تراش کے ابتدائی رُوکار کو تعبیر کرتا ہے جس نے فساد کے بعد شکل د ج ع اختیار کی ہے۔ تب "زور اور فساد" کے منحنی سے اور تراش کی شکل سے زور کا منحنی دَ جَ عَ کھینچا جا سکتا ہے۔ اس کو کھینچنے کا طریقہ حسب ذیل ہوگا:- فرض کرو کہ فساد کے نقشے کا کوئی معین ل ب ہے۔ تب "زور اور فساد" کے منحنی سے اس فساد کے متناظر زور معلوم کرو اور اس کو دیئے ہوئے نقطے پر شہتیر کے عرض سے ضرب دو اور اس کو کسی موزوں پیمانے پر لَ بَ سے تعبیر کرو۔ بَ کے جیسے نقاط کو ملانے سے زور کا نقشہ حاصل ہوگا۔

اب فرض کرو کہ زور کے نقشے کے رقبے ص اور ت ہیں اور ان کے مرکزِ ہندسی گ اور گَ۔ تب سادہ خماؤ میں ص اور ت مساوی ہونگے اور اگر مراکزِ ہندسی کے درمیان عمودی فاصلہ ف ہو تو مزاحمت کا معیار ص × ف یا ت × ف ہوگا۔

اگر طلبہ شہتیروں کے زوروں کے متعلق اس عام طریقے کو اچھی طرح سمجھ جائیں تو اُن کو خصوصی نظریوں کے سمجھنے میں وہ دقت محسوس نہ ہو جو اکثر محسوس ہوتی ہے۔ باب ۱۵ میں محکم کنکریٹ سے بحث کرتے وقت ہم ایسے خماؤ کے متعلق مزید نوٹ اور عددی مثالیں دیکھینگے جس میں معمولی مفروضہ اختیار نہیں کیا جا سکتا۔

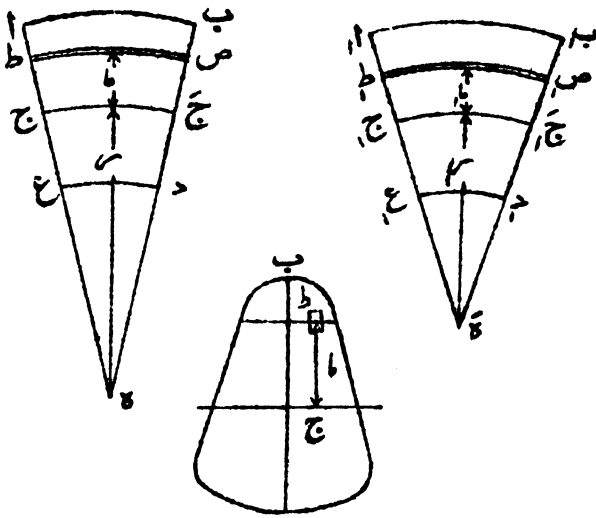
شہتیر جن میں ابتدائی انحنا قابل لحاظ ہو ——— فرض کرو کہ ا ب د ع (شکل ۱۳۸) کسی منحنی شہتیر کے ایک چھوٹے ٹکڑے کو تعبیر کرتا ہے۔ O مرکزِ انحنا ہے اور ا ع اور ب د وسطی خط ج ج پر

شکل ۷۳

عمود ہیں۔ تب ظاہر ہے کہ فساد اور زور کی ایک خاص حدت پیدا کرنے کے لیے ع د میں اتنا مجموعی فساد درکار نہیں ہوگا جتنا کہ ا ب میں کیونکہ ع د کا ابتدائی طول ا ب سے کم ہے۔ اِس طرح تعدیلی محور مرکزِ ہندسی میں سے نہیں گزریگا۔

یہ مفروضہ ہم اب بھی برقرار رکھینگے کہ زور اور فساد باہم متناسب ہیں اور نیز برنولی کا مفروضہ کہ جو تراشش ابتدا میں مستوی تھی وہ خماؤ کے بعد بھی مستوی رہتی ہے۔ اِن کی مدد سے منحنی شہتیروں کے خماؤ کا ایک صحیح نظریہ حاصل کیا جاسکتا ہے:۔

فرض کرو کہ حصہ ا ب د ع خماؤ کے بعد وضع ا ب ا د ع اختیار کرتا ہے۔ مرکزِ ہندسی میں سے خط ج ج سے فاصلہ ما پر ایک نقطہ ط پر سے ایک چھوٹے سے رقبے بہ پر اور شہتیر کے ایک ریشے ط ص پر

غور کرو جو رقبہ بہ نہ سے گزرتا ہے۔

شکل ۷۲۔ خمدار شہتیروں کے زور

فساد کے بعد ریشہ ط ص نئے مرکزِ ہندسی کے خط ج جَ سے فاصلہ ما پر وضع طِ صِ اختیار کرتا ہے۔

$$\text{تب ط ص میں فساد کی حدت} = \frac{\text{طِ صِ} - \text{ط ص}}{\text{ط ص}}$$

اور اگر ط پر زور زا ہو تو

$$\frac{\text{زا}}{\text{ے}} = \frac{\text{طِ صِ} - \text{ط ص}}{\text{ط ص}} = \frac{\text{طِ صِ}}{\text{ط ص}} - 1$$

$$\therefore \quad \frac{\text{طِ صِ}}{\text{ط ص}} = 1 + \frac{\text{زا}}{\text{ے}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{اسی طرح ج جَ میں فساد کی حدت} = \frac{\text{جِ جَِ} - \text{ج جَ}}{\text{ج جَ}}$$

اور اگر مرکزِ ہندسی پر زور ز ہو تو اسی طرح

$$\frac{ج_1 ج'_1}{ج ج'} = 1 + \frac{ز}{ی} \qquad \text{.........(۲)}$$

(۱) کو (۲) سے تقسیم کرنے سے:-

$$\frac{ط_1ص \times ج ج'}{ج_1ج'_1 \times طص} = \frac{1 + \frac{ز_1}{ی}}{1 + \frac{ز}{ی}}$$

لیکن

$$\frac{ط_1ص}{ج_1ج'_1} = \frac{ر_1 + ط_1}{ر_1} = 1 + \frac{ط_1}{ر_1}$$

$$\frac{ج ج'}{طص} = \frac{ر}{ر + ط} = \frac{1}{1 + \frac{ط}{ر}}$$

نیز چونکہ $\frac{ز_1}{ی}$ اور $\frac{ز}{ی}$ بہت چھوٹی مقداریں ہیں، اس لیے اس طرح لکھا جاسکتا ہے:-

$$\frac{1 + \frac{ز_1}{ی}}{1 + \frac{ز}{ی}} = \left(1 - \frac{ز}{ی} + \frac{ز_1}{ی}\right)$$

اِس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1 + \frac{ط_1}{ر_1}}{1 + \frac{ط}{ر}} = 1 - \frac{ز}{ی} + \frac{ز_1}{ی} \qquad \text{......(۳)}$$

$$\frac{ز}{ی} = \frac{ز_1}{ی} + 1 - \frac{1 + \frac{ط_1}{ر_1}}{1 + \frac{ط}{ر}}$$

$$= \frac{ز_1}{ی} + \frac{\frac{ط}{ر} - \frac{ط_1}{ر_1}}{1 + \frac{ط}{ر}}$$

$$= \frac{\text{ز}_{\text{ا}}}{\text{ے}} - \frac{\frac{\text{ما}}{\text{ر}_{\text{ا}}} - \frac{\text{ما}}{\text{ر}}}{\frac{\text{ما}}{\text{ر}} + 1} \quad \cdots\cdots (۴)$$

$$\therefore \quad \text{ز}_{\text{ا}} = \text{ز} + \frac{\text{ے}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ر}_{\text{ا}}} - \frac{\text{ما}}{\text{ر}}\right)}{\frac{\text{ما}}{\text{ر}} + 1} \quad \cdots\cdots (۵)$$

پوری تراش پر قوت $\Sigma\, \text{ز}_{\text{ا}} \times \text{بہ}$ ہو گی جو خالص خماؤ کی صورت میں صفر ہو گی۔

$$\therefore \quad \Sigma\, \text{ز}_{\text{ا}} \times \text{بہ} = 0$$

$$= \Sigma\, \text{ز} \times \text{بہ} + \Sigma\, \frac{\text{ے}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ر}_{\text{ا}}} - \frac{\text{ما}}{\text{ر}}\right)}{\left(\frac{\text{ما}}{\text{ر}} + 1\right)} \times \text{بہ}$$

لیکن $\Sigma\, \text{ز} \times \text{بہ} = \text{ز}\, \Sigma\, \text{بہ} = \text{ز}\, \text{ب}$

$$\therefore \quad \text{ز} = \frac{\text{ے}}{\text{ب}}\, \Sigma\, \frac{\left(\frac{\text{ما}}{\text{ر}_{\text{ا}}} - \frac{\text{ما}}{\text{ر}}\right)}{\left(\frac{\text{ما}}{\text{ر}} + 1\right)} \times \text{بہ} \quad \cdots\cdots (۶)$$

رقبے کے چھوٹے حصے پر کی قوت کا معیار ج کے گرد $= \text{ز}_{\text{ا}} \times \text{بہ} \times \text{ما}$ اور ان معیاروں کا حاصل جمع مزاحمت کے معیار کے اور اس طرح خماؤ کے معیار م کے مساوی ہو گا۔

$$\therefore \quad \text{م} = \Sigma\, \text{ز}_{\text{ا}} \times \text{ما} \times \text{بہ}$$

$$= \Sigma\, \text{ز} \times \text{بہ} \times \text{ما} + \Sigma\, \frac{\text{ے}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ر}_{\text{ا}}} - \frac{\text{ما}}{\text{ر}}\right)}{\left(\frac{\text{ما}}{\text{ر}} + 1\right)} \times \text{بہ}\, \text{ما}$$

لیکن $\Sigma\, \text{ز}\, \text{بہ}\, \text{ما} = \text{ز}\, \Sigma\, \text{بہ}\, \text{ما} = \text{ز} \times$ رقبے کا پہلا معیار

مرکزِ ہندسی کے گرد

$$= \text{ن}_{\text{ب}} \times \text{۰} = \text{۰}$$

$$\therefore \quad \text{م} = \Sigma \frac{\text{ے}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ر}_{\text{ا}}} - \frac{\text{ما}}{\text{ر}}\right)}{\left(\text{۱} + \frac{\text{ما}}{\text{ر}}\right)} \times \text{به} \times \text{ما} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۷})$$

یہ عام ترین صورت ہے اور اختیار کردہ مفروضے کے لیے صحیح ہے۔

اب ذیل کی خاص صورتوں پر غور کرو:

(۱) معمولی سیدھا شہتیر، ر لامتناہی، $\text{ر}_{\text{ا}}$ بہت بڑا۔

اس صورت میں $\text{ن}_{\text{ب}} = \Sigma \frac{\text{ے}}{\text{ب}} \frac{\frac{\text{ما}}{\text{ر}_{\text{ا}}}}{\text{۱}} \times \text{به}$

$$= \Sigma \frac{\text{ے}}{\text{ر}_{\text{ا}}\,\text{ب}}\, \text{ما}\, \text{به} = \text{۰}$$

اس طرح $\quad \text{م} = \Sigma \frac{\text{ے}}{\text{ر}_{\text{ا}}} \times \text{ما}_{\text{ا}}\, \text{ما}\, \text{به}$

لیکن $\text{ما}_{\text{ا}}$ تقریباً ما کے مساوی ہے

$$\therefore \quad \text{م} = \Sigma \frac{\text{ے}}{\text{ر}_{\text{ا}}} \text{ما}^{\text{۲}}\, \text{به}$$

$$= \frac{\text{ے}\,\text{آ}}{\text{ر}_{\text{ا}}}$$

اور مساوات (۵) سے $\text{ن}_{\text{ما}} = \text{۰} + \frac{\text{ے}\,\text{ما}}{\text{ر}_{\text{ا}}}$

$$= \frac{\text{ے} \times \text{ما}}{\text{ر}_{\text{ا}}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ے}}{\text{ر}_{\text{ا}}} = \frac{\text{ن}_{\text{ما}}}{\text{ما}}$$

$$\therefore \quad \text{م} = \frac{\text{ن}_{\text{ما}}\,\text{آ}}{\text{ما}}$$

اور یہی نتیجہ پہلے حاصل ہوا تھا۔

(۲) زنجیر کی کڑیوں وغیرہ کے لیے وِنکلر[1] کا ضابطہ:۔

وِنکلر نے اِس امر کی طرف توجہ منعطف کرائی کہ زنجیر کی کڑیوں وغیرہ جیسی چیزوں پر جن میں کہ ابتدائی انحنا قابلِ لحاظ ہے خماؤ کے معمولی ضابطوں کا استعمال درست نہیں اور اِس نے اِن ضابطوں میں حسب ذیل ترمیم کی:۔

اس نے $\text{م}_1 = \text{م}$ لیا

تب مساوات (۵) حسب ذیل ہوگئی:۔

$$\text{ن}_\text{م} = \text{ن} + \frac{\text{ے} \times \text{م}\left(\frac{1}{\text{ر}_1} - \frac{1}{\text{ر}}\right)}{1 + \frac{\text{م}}{\text{ر}}}$$

$$= \text{ن} + \text{ے}\left(\frac{1}{\text{ر}_1} - \frac{1}{\text{ر}}\right) \times \frac{\text{م}\,\text{ر}}{\text{ر} + \text{م}} \quad \cdots\cdots\cdots (۸)$$

تب مساوات (۶) سے

$$\text{ن} = -\frac{\text{ے}}{\text{ب}}\left(\frac{1}{\text{ر}_1} - \frac{1}{\text{ر}}\right) \text{ع}\left(\frac{\text{م}\,\text{ر}}{\text{ر}+\text{م}}\right) \times \text{بہ}$$

اس میں $\text{ع}\left(\frac{\text{م}\,\text{ر}}{\text{ر}+\text{م}}\right) \times \text{بہ} = \text{ع}\,\text{م}\,\text{بہ} - \text{ع}\left(\frac{\text{م}^2}{\text{ر}+\text{م}}\right) \times \text{بہ}$

$$= 0 - \text{ع}\left(\frac{\text{م}^2}{\text{ر}+\text{م}}\right) \times \text{بہ}$$

اب فرض کرو کہ $\text{ع}\left(\frac{\text{م}^2 \times \text{ر}}{\text{ر}+\text{م}}\right) \times \text{بہ} = \text{ب}\,\text{ھ}^2$

جہاں ھ اِس ربط سے معیّن ہوتا ہے اور اس کو کوڑی کا نصف قطر

[1] Winkler

کہا جاسکتا ہے یہ معمولی صورت میں یہ گردشی نصف قطر کے متناظر ہے۔

اس طرح دیکھو $\frac{ب\,ھ^{2}}{ر} = ع\left(\frac{ا^{2}}{ا+ر}\right)\times ب$

$= ع\,\frac{ا\,ر}{ر+ا}\times ب$

$\therefore\quad ع\left(\frac{ا}{ر+ا}\right)\times ب = \frac{ب\,ھ^{2}}{ر^{2}}$

اِس طرح $ز = \frac{س}{ب}\left(\frac{1}{ر_{۱}}-\frac{1}{ر}\right)\frac{ب\,ھ^{2}}{ر}$

یعنی $ز = \frac{س\,ھ^{2}}{ر}\left(\frac{1}{ر_{۱}}-\frac{1}{ر}\right)$ .... (۹)

مساوات (۷) سے

$م = ع\,\frac{س\left(\frac{1}{ر_{۱}}-\frac{1}{ر}\right)}{1+\frac{ا}{ر}}\times ا^{2}\,ب$

$= س\,ر\left(\frac{1}{ر_{۱}}-\frac{1}{ر}\right)ع\,\frac{ا^{2}\,ب}{ر+ا}$

$= س\left(\frac{1}{ر_{۱}}-\frac{1}{ر}\right)ع\,\frac{ر\,ا^{2}}{ر+ا}\times ب$

$= س\,ب\,ھ^{2}\left(\frac{1}{ر_{۱}}-\frac{1}{ر}\right)$ .... (۱۰)

اب مساوات (۸) پر واپس آئیں تو

$ز_{ا} = \frac{س\,ھ^{2}}{ر}\left(\frac{1}{ر_{۱}}-\frac{1}{ر}\right)+س\left(\frac{ا}{ر_{۱}}-\frac{ا}{ر}\right)\frac{ا\,ر}{ر+ا}$

$= \frac{م}{ر\times ب}+\frac{م\,ا}{ب\,ھ^{2}}\times\left(\frac{ر}{ر+ا}\right)$[1] .... (۱۱)

[1] یہ صرف خماؤ کا زور ہے۔ ہم ٹکڑوں کی صورت میں اس راست زور کو بھی جمع کرنا ہوگا جو پوری تراش پر عمل کرتا ہے۔

مستطیلی تراش ۔۔ اگر تراش مستطیلی ہے اور اس کی گہرائی گ اور عرض ض ہے تو دیکھو ریاضی کی رُو سے تحلیل کرنے سے :۔

$$\text{ب ھ}^2 = \int_{-\frac{\text{گ}}{2}}^{+\frac{\text{گ}}{2}} \frac{\text{ر ا}^2 \times \text{ض فرا}}{\text{ا} + \text{ر}}$$

اِس میں $\int \frac{\text{ا}^2 \text{ فرا}}{\text{ا} + \text{ر}} = \int \text{ا فرا} - \int \frac{\text{ا ر}}{\text{ا} + \text{ر}} \text{ فرا}$

$$= \int \text{ا فرا} - \int \text{ر فرا} + \int \frac{\text{ر}^2 \text{ فرا}}{\text{ا} + \text{ر}}$$

$$= \frac{\text{ا}^2}{2} - \text{ر ا} + \text{ر}^2 \text{ لوک}_{\text{و}} (\text{ا} + \text{ر})$$

$$\therefore \text{ب ھ}^2 = \left[\frac{\text{ا}^2}{2} - \text{ر ا} + \text{ر}^2 \text{ لوک}_{\text{و}} (\text{ر} + \text{ا}) \right]_{-\frac{\text{گ}}{2}}^{+\frac{\text{گ}}{2}} \times \text{ر ض}$$

$$= \text{ض ر} \left[0 - \text{ر گ} + \text{ر}^2 \text{ لوک}_{\text{و}} \frac{2\text{ر} + \text{گ}}{2\text{ر} - \text{گ}} \right]$$

$$= \text{ض ر}^2 \left[\text{ر لوک}_{\text{و}} \frac{2\text{ر} + \text{گ}}{2\text{ر} - \text{گ}} - \text{گ} \right]$$

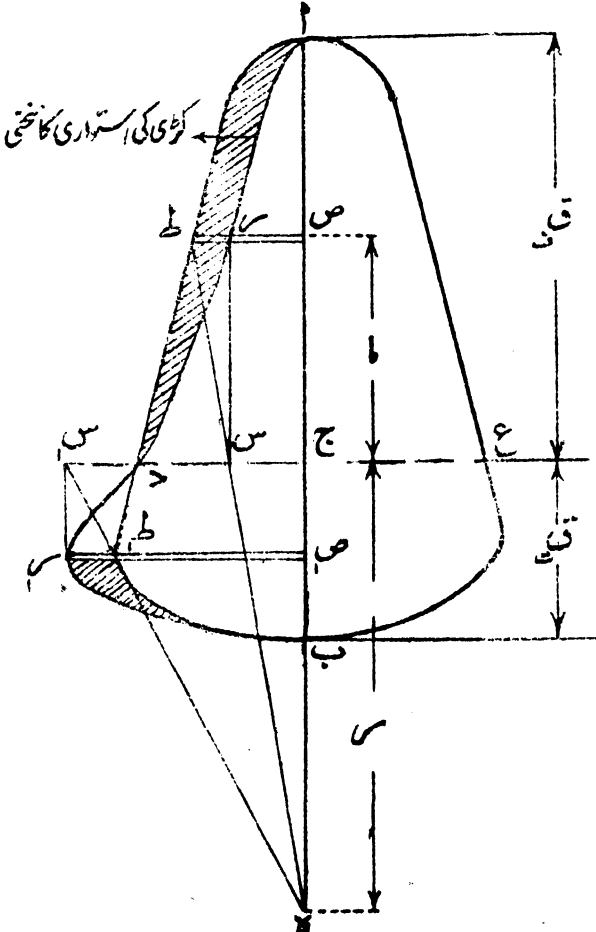
$$\therefore \text{ن}_{\text{ا}} = \frac{\text{م}}{\text{ر ب}} + \text{م} \times \text{ا} \times \left(\frac{\text{ر}}{\text{ر} + \text{ا}} \right) \times \frac{1}{\text{ض ر}^2 \left[\text{ر لوک}_{\text{و}} \frac{2\text{ر} + \text{گ}}{2\text{ر} - \text{گ}} - \text{گ} \right]}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ر}} \left\{ \frac{1}{\text{ب}} + \frac{\text{ا}}{\text{ض} (\text{ر} + \text{ا}) \left(\text{ر لوک}_{\text{و}} \frac{2\text{ر} - \text{گ}}{2\text{ر} + \text{گ}} - \text{گ} \right)} \right\}$$

یہ اعظم ہوگا جب کہ $\text{ا} = \pm \frac{\text{گ}}{2}$

عام ترسیمی حل ـــــــ فرض کرو کہ شکل ۷۵ ایک شہتیر کی تراش ا د ب ع کو تعبیر کرتی ہے شہتیر خماؤ کے مستوی میں خمدار ہے اور مرکزی خط د ع کا مرکزِ انحنا ہ ہے۔ نصف تراش کی ایک پتلی پٹی ط ص پر غور کرو جو ج د سے فاصلہ ما پر ہے۔ ط ہ کو ملاؤ جو ج د کو س پر کاٹے اور ص ج کے متوازی س ر کھینچو جو ط ص کو ر پر کاٹے۔

$$\text{تب}\quad \frac{\text{طر}}{\text{طص}} = \frac{\text{رس}}{\text{صہ}} = \frac{\text{ما}}{\text{ر + ما}}$$

اِس عمل کو ط ص جیسی کئی پٹیوں پر کریں اور حاصل شدہ نقاط کو ملائیں تو ایک منحنی ا ر د ر ب حاصل ہوتا ہے جس کو کٹری کی استواری کا منحنی کہا جاتا ہے۔

شکل ۷۵ - منحنی شہتیر، وغیرہ

تب کڑی کی استواری کے منحنی کا رقبہ $= \text{ب}_{\text{ی}} = \Sigma\left(\frac{\text{ما}}{\text{ر}+\text{ما}}\right)\times\text{بہ}$

لیکن $\frac{\text{ب ھ}^{2}}{\text{ر}^{2}} = \Sigma\left(\frac{\text{ما}}{\text{ر}+\text{ما}}\right)\text{بہ}$

$\therefore \quad \text{ب}_{\text{ی}} = \frac{\text{ب ھ}^{2}}{\text{ر}^{2}}$

اب فرض کرو کہ $\frac{\text{ب}_{\text{ی}}}{\text{ب}} = \text{ک}$

یعنی $\text{ب ھ}^{2} = \text{ب}\times\text{ک}\times\text{ر}^{2}$

اب زور کی مساوات (۱۱) میں اِن قیمتوں کو درج کرنے سے

$$\text{ز}_{\text{ما}} = \frac{\text{م}}{\text{ر}\times\text{ب}} + \frac{\text{م ما}\times\text{ر}}{\text{ب}\times\text{ک}\times\text{ر}^{2}(\text{ر}+\text{ما})}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ب}}\left\{\frac{1}{\text{ر}} + \frac{\text{ما}}{\text{ر ک}(\text{ر}+\text{ما})}\right\}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ب ر}}\left\{1 + \frac{\text{ما}}{\text{ک}(\text{ر}+\text{ما})}\right\}$$

تب اگر خط د ع سے انتہائی فشاری اور تنشی ریشوں کے فاصلے علی الترتیب $\text{ق}_{\text{ن}}$ اور $\text{ق}_{\text{ت}}$ ہوں تو

$$\text{اعظم فشاری زور} = \text{ز}_{\text{ن}} = \frac{\text{م}}{\text{ب ر}}\left\{1 + \frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ک}(\text{ر}+\text{ق}_{\text{ن}})}\right\}$$

$$\text{اعظم تنشی زور} = \text{ز}_{\text{ت}} = \frac{\text{م}}{\text{ب ر}}\left\{\frac{\text{ق}_{\text{ت}}}{\text{ک}(\text{ر}-\text{ق}_{\text{ت}})} - 1\right\}$$

تعدیلی محور کا محل —— ما کی جس قیمت سے $\text{ز}_{\text{ما}} = 0$۔ اس سے تعدیلی محور کا فاصلہ خط د ع سے حاصل ہوگا۔ یعنی

$$\frac{ا}{ک(ر+ا)} = -1$$

یا $ا = -ک ر - ک ا$

یا $ا = -\frac{ک ر}{1 + ک}$

اس سے تعدیلی محور کا محل معلوم ہوتا ہے۔

(۳) اینڈریوز و پیرسن[1] کا ضابطہ۔ مصنف کتاب ہذا اور پروفیسر کارل پیرسن نے ایک مضمون شایع کیا ہے جس میں یہ دکھایا گیا کہ ونکلر کے ضابطے میں ایک مزید اصلاح کی ضرورت ہے کیونکہ عرضی فساد کی وجہ سے یہ صحیح نہیں کہ ا = ا

اس صورت میں یہ ضابطہ زیادہ پیچیدہ ہوجاتا ہے لیکن زور ایک ترسیمی طریقے سے حاصل ہو سکتے ہیں جو ونکلر کے طریقے سے زیادہ دقت طلب نہیں۔ مذکورہ بالا مضمون میں تجربے سے ثابت کیا گیا ہے کہ اس طریقے سے جو ضابطے حاصل ہوتے ہیں وہ خماؤ کے معمولی ضابطوں سے بہت زیادہ صحیح ہوتے ہیں۔

پروفیسر گڈمین۔ ایم۔ آئی۔ سی۔ ای کے ایک بعد کے مضمون سے ان تجربات کے نتائج کی تصدیق ہوتی ہے اور اس مضمون کے نتائج اینڈریوز و پیرسن کے تجربات کے نتائج کے تقریباً بالکل مطابق ہیں ہم گنجایش کی کمی کی وجہ سے اس کی مزید تفصیل سے مجبور ہیں۔ طالب علم اگر اس مسئلے سے تفصیلی بحث کرنا چاہیں تو ان مضامین کا مطالعہ کرسکتے ہیں۔

شہتیر جن پر لداؤ صدر محور پر مائل ہو۔ شہتیر کے زوروں کے ضابطے حاصل کرتے وقت ہم نے فرض کیا کہ "شہتیر کی تراش ایک ایسے محور کے گرد تمثاکل ہے جو تراش کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے اور خماؤ کے مستوی کے متوازی ہے"۔

[1] Andrews-Pearson

معیار جمود یعنی دوسرے معیار کی بحث میں ہم نے دیکھا ہے کہ تراش کا کوئی محور تشاکل ہو تو وہ ایک صدر محور کہلائیگا۔ اس طرح ہمارے مفروضے کے معنے یہ ہوئے کہ ایک صدر محور شہتیر کے لداؤ کے مستوی میں واقع ہوتا ہے۔

اگر کسی صورت میں ایسا نہ ہو تو حسب ذیل عمل کیا جائیگا۔ شہتیر کا معیار جمود کا ناقص کھینچو۔ لا لا اور ما ما (شکل ۷۶) صدر محور ہیں۔ اور فرض کرو کہ لداؤ کے مستوی کا نقش (Trace) سے سے ہے۔ تب تعادلی محور ناقص کا وہ قطر ہوگا جو لداؤ کے مستوی کا مزدوج ہے۔ خماؤ کا مستوی تعادلی محور کے علی القائم ہوگا۔

شکل ۷۶ - غیر تشاکل تراشوں کے زور

اِس کو یوں ثابت کیا جاسکتا ہے :-

تراش کے نقطہ ط پر ایک چھوٹے سے رقبے پر غور کرو (شکل ۷۶) اور فرض کرو کہ ط ن اور ط م علی الترتیب لداؤ کے مستوی اور تعدیلی محور کے علی القوائم کھینچے گئے ہیں۔ تب ط پر زور کی حدت تعدیلی محور سے فاصلہ ط م کے متناسب ہوگی۔ اس طرح اگر س ایک مستقل ہو تو زط = س × ط م لکھ سکتے ہیں۔

اِس لیے اِس رقبے پر کے بوجھ کا معیار ے ے کے گرد

= زط × بہ × ط ن = س × بہ × ط م × ط ن

اب چونکہ ے ے لداؤ کا مستوی ہے اس لیے تراش پر کے تمام زوروں کا معیار ے ے کے گرد صفر ہونا چاہیے کیونکہ زوروں کا جفت بھی مستوی ے ے کے اندر ہوگا۔

∴ Σ زط × بہ × ط ن = ۰

یا Σ س × بہ × ط م × ط ن = ۰

یا Σ بہ × ط م × ط ن = ۰

لیکن Σ بہ × ط م × ط ن کو حاصل ضرب معیار کہا گیا ہے اور یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ اگر کسی رقبے کا حاصلِ ضرب معیار دو خطوط کے گرد صفر ہو تو یہ خطوط ایک ناقص کے مزدوج قطر ہونگے۔

اس لیے تعدیلی محور معلوم کرنے کے لیے ے ے کا مزدوج قطر کھینچ لو۔ اور یہ اس طرح کیا جاسکتا ہے کہ ے ے کے متوازی ایک وتر کھینچا جائے اور اس کی تنصیف کر کے نقطۂ تنصیف کو ج سے ملایا جائے۔

اب فرض کرو کہ ت۔ م کے گرد گردشی نصف قطر گ ہے اور فشاری اور تنشی جانبوں کے انتہائی نقطوں کے فاصلے اس س م سے ق۱ اور ق۲ ہیں۔

تب مقیاس حسبِ ذیل ہونگے :۔

$$مق_ن = \frac{ب گ^2_{ت م}}{ق_ن} = \frac{آ_{ت م}}{ق_ن}$$

$$مق_ت = \frac{ب گ^2_{ت م}}{ق_ت} = \frac{آ_{ت م}}{ق_ت}$$

اور اعظم فشاری اور تنشی زور حسبِ ذیل ربطوں سے حاصل ہونگے :۔

$$ز_ن = \frac{م}{مق_ن}$$

$$ز_ت = \frac{م}{مق_ت}$$

عددی مثال ــــ ایک ۵ × ۳ × ½ کی نامساوی زاویئی تراش کو چھوٹے پہلو پر لادا گیا ہے اور بڑا پہلو نیچے کی طرف ہے۔ ۷ ٹن فی مربع انچ زور کے لیے بے خطر خماؤ کا معیار معلوم کرو۔

معیاری تراشوں کی جدولوں سے حاصل ہوتا ہے کہ اس تراش کے لیے گردشی نصف قطر کی اعظم اور اقل قیمتیں ۱٫۶۹ اور ۰٫۶۵ انچ ہونگی۔ صدر محور انتصابی خط ہے سے ½ ۹° کا زاویہ بنائیگا۔ خط ہے سے لداؤ کے مستوی کا نقش ہے۔

اب معیاروں کا ناقص (شکل ۷۶ کے دُگنے پیمانے پر) کھینچا جائیگا۔ محورِ اعظم گ لالا کا دُگنا اور محورِ اصغر گ ہاہا کا دُگنا ہوگا۔

ساخت کا جو طریقہ اس سے پہلے دیا گیا ہے اس کی مدد سے ناقص سے ہے کا مزدوج قطر حاصل ہوگا۔ یہ تعدیلی محور ہوگا۔ گ ت م حاصل کرنے کے لیے ناقص کا ایک مماس حت ہر کے متوازی کھینچو اور ج سے ایک خط اس محور پر عمود وار کھینچو۔ اس کا طول ۰٫۸۸ انچ پایا جائیگا۔ اب تعدیلی محور سے تراش کے انتہائی نقطوں کے فاصلے ق ن اور ق ت ناپو۔ یہ علی الترتیب ۱٫۸۰ اور ۱٫۸۳ انچ پائے جائینگے۔ تراش کا رقبہ

۳٫۷۵ مربع انچ ہے - اِس طرح دیکھو

$$مقف = \frac{۳٫۷۵ \times ٫۸۸^{۲}}{۱٫۸۰} = ۱٫۶۱ \text{ انچ اکائیاں}$$

$$مقت = \frac{۳٫۷۵ \times ٫۸۸^{۲}}{۱٫۸۳} = ۱٫۵۹ \text{ انچ اکائیاں}$$

∴ اگر بے خطر زور = زف = زت = ۷ ٹن فی مربع انچ

تو بے خطر خماؤ کا معیار = ۷ × ۱٫۵۹ = ۱۱٫۱۳ انچ ٹن .... (۱)

اگر ت ـ ہ لداؤ کے مستوی کے علی القوائم لیا جاتا جیسا کہ متشاکل شہتیر کی صورت میں ہوتا تو گ = ۱٫۶۰، قف = ۱٫۷۳ اور قت = ۳٫۲۷ حاصل ہوتا۔ اِن سے

$$مقف = \frac{۳٫۷۵ \times ۱٫۶۰^{۲}}{۱٫۷۳} = ۵٫۴۶ \text{ انچ اکائیاں}$$

$$مقت = \frac{۳٫۷۵ \times ۱٫۶۰^{۲}}{۳٫۲۷} = ۲٫۹۴ \text{ انچ اکائیاں}$$

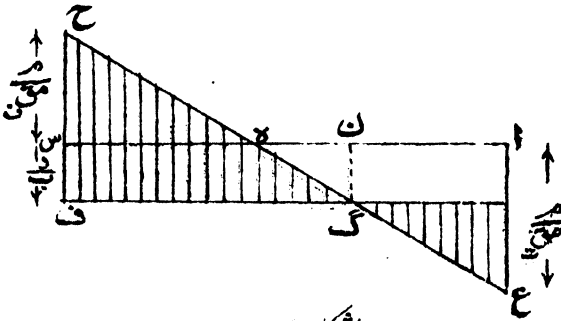
∴ بے خطر خماؤ کا معیار = ۷ × ۲٫۹۴ = ۲۰٫۵۸ انچ ٹن (۲)

[نوٹ ۔ بے خطر خماؤ کا معیار معلوم کرنے کے لیے اگر کامی زور تناؤ اور فشار میں مساوی ہوں تو صریحاً صرف اقل مقیاس پر غور کیا جائیگا۔]

نتائج (۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ حقیقی تقدیلی محور نہ معلوم ہونے سے بہت بڑی غلطی واقع ہوتی ہے۔ عملی مجوزوں سے یہ غلطی اکثر سرزد ہوتی ہے۔

اِسی قسم کی رعایت اُن متشاکل تراشوں میں بھی ملحوظ رکھنی چاہیے جن کا ایک صدر محور لداؤ کے مستوی پر منطبق نہ ہو۔ ایسی صورتیں عملاً تختی دار گرڈروں میں واقع ہوتی ہیں جب کہ بوجھ گزر رہا ہو اور ہوا ایک طرف سے چل رہی ہو اور نیز ڈھلواں پلوں میں یا جن میں آڑے گرڈروں کی کوریں اسی ڈھال پر رکھی جاتی ہیں جو صدر گرڈروں کا ہوتا ہے۔

خماؤ کے زور اور راست زور ایک ساتھ —— اگر شہتیر پر لداؤ

اس طرح کا ہو کہ خماؤ کے زوروں کے علاوہ راست زور بھی پیدا کرے تو

شکل ۷۷

خماؤ کا زور اور راست زور ملا ہوا

تراش کے کسی نقطے پر حاصل زور کی مقدار ان علیحدہ زوروں کو جمع کرنے سے ملیگی۔ فرض کرو کہ ا س (شکل ۷۷) ایک شہتیر کی کسی تراش کا رُوکار ہے۔ تراش کا مرکزِ ہندسی لا ہے۔ رقبہ ب اور فشاری اور تنشی مقیاس مق اور مق ہیں۔ فشاری پہلو س ہے اور تنشی پہلو ا۔

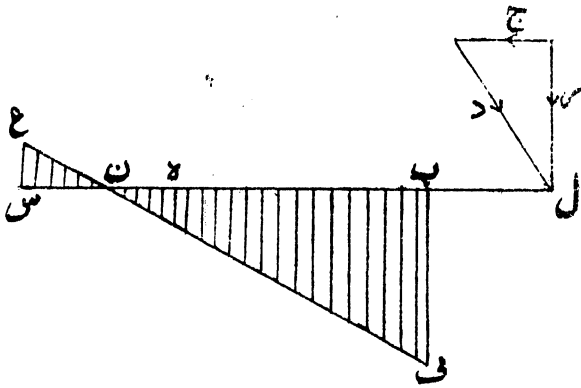
تب اگر راست قوت ایک دباؤ د ہو تو تراش پر ایک یکساں فشاری زور $\frac{د}{ب}$ ہوگا۔ اگر خماؤ کا معیار م ہو تو خماؤ سے پیدا ہونے والے اعظم فشاری اور تنشی زور علی الترتیب $\frac{م}{مق_ف}$ اور $\frac{م}{مق_ت}$ ہونگے۔ اس طرح

$$\text{حاصل اعظم فشاری زور} = ز_ف = \frac{د}{ب} + \frac{م}{مق_ف} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{حاصل اعظم تنشی زور} = ز_ت = \frac{م}{مق_ت} - \frac{د}{ب} \quad \ldots\ldots (2)$$

تراش پر اس مرکب زور کی تقسیم شکل ۷۷ کے مطابق ہوگی۔

ف ج اعظم فشاری زور کو تعبیر کرتا ہے اور گ ع اعظم تنشی زور کو۔ تعدیلی محور نقطہ ن پر ہوگا جہاں کہ زور صفر ہے۔

شکل ۸۵

اگر راست قوت دباؤ د کی بجائے تناؤ ت ہو تو

$$\text{حاصل اعظم تنشی زور} = ز_ت = \frac{ت}{ب} + \frac{م}{مق_ت} \quad \ldots\ldots(۳)$$

$$\text{حاصل اعظم فشاری زور} = ز_ن = \frac{م}{مق_ن} - \frac{ت}{ب} \quad \ldots\ldots(۴)$$

زور، دباؤ کے خط سے حاصل کرنا ـــــ اگر تراش پر حاصل قوت ر ہو (شکل ۸۵) اور دباؤ کا خط س ب محزوجہ کو بوجہ نقطہ ل پر قطع کرے (دیکھو صفحہ ۱۸۱) تو ر کو تراش کے متوازی اور علی القوائم تحلیل کرنے سے ایک جزی قوت ج اور ایک دباؤ د حاصل ہوگا۔

اِس صورت میں م = د × ہ ل = د × لا

اور اگر ہ س = قی اور ہ ب = قی

$$\text{مق}_\text{ن} = \frac{\text{آ}}{\text{ق}_\text{ن}} = \frac{\text{ب گ}^2}{\text{ق}_\text{ن}} \quad \text{تو}$$

$$\text{مق}_\text{ت} = \frac{\text{آ}}{\text{ق}_\text{ت}} = \frac{\text{ب گ}^2}{\text{ق}_\text{ت}}$$

جہاں گ ایک ایسے خط کے گرد گردشی نصف قطر ہے جو مرکزِ ہندسی میں سے تعدیلی محور کے متوازی گزرتا ہے۔

اس لیے مساواتوں (۱) اور (۲) سے :—

$$\text{ز}_\text{ن} = \frac{\text{د}}{\text{ب}} + \frac{\text{د} \times \text{لا} \times \text{ق}_\text{ن}}{\text{ب گ}^2}$$

$$= \frac{\text{د}}{\text{ب}} \left(1 + \frac{\text{لا ق}_\text{ن}}{\text{گ}^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\text{ز}_\text{ت} = \frac{\text{د} \times \text{لا} \times \text{ق}_\text{ت}}{\text{ب گ}^2} - \frac{\text{د}}{\text{ب}}$$

$$= \frac{\text{د}}{\text{ب}} \left(\frac{\text{لا ق}_\text{ت}}{\text{گ}^2} - 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

یا اگر حاصل عادی جزوِ تحلیلی ایک تناؤ ت ہو تو مساواتوں (۳) اور (۴) سے:—

$$\text{ز}_\text{ت} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}} \left(1 + \frac{\text{لا ق}_\text{ت}}{\text{گ}^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\text{ز}_\text{ن} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}} \left(\frac{\text{لا ق}_\text{ن}}{\text{گ}^2} - 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

تعدیلی محور کا محل — تعدیلی محور کا محل ن حسب ذیل طریقے پر معلوم ہو سکتا ہے:—

فرض کرو کہ یہ ک سے فاصلہ ما پر ہے۔

تب خماؤ کی وجہ سے زور = $\frac{م \times ا}{آ}$

$= \frac{د \times لا \times ا}{ب گ^۲}$

اِس نقطے پر خماؤ کا زور راست زور کے بالکل مساوی ہوگا

∴ $\frac{د}{ب} = \frac{د لا ا}{ب گ^۲}$

یا $لا ا = گ^۲$

یعنی $ا = \frac{گ^۲}{لا}$ .... (۹)

ذیل کی عددی مثالوں سے مخلوط راست زور اور خماؤ کے زور کا مسئلہ صاف ہو جائیگا۔ مزید مثالیں اس کتاب کے اندر مختلف مقامات پر آئینگی۔

عددی مثالیں۔ (۱) ایک تناؤ سلاخ ایک چپٹی سلاخ ہے جو ۸ انچ چوڑی اور ۱ انچ موٹی ہے۔ ٹھیک طور پر نہ بٹھائی جانے کی وجہ سے کھینچ کا خط سلاخ کے ہندسی محور میں سے گزرنے کی بجائے اس سے $\frac{۱}{۴}$ انچ ہٹ کر اُس مستوی کے اندر واقع ہوتا ہے جو سلاخ کی موٹائی کی تنصیف کرتا ہے۔ اگر کھینچ ۳۶ ٹن ہو تو کھینچ کے خط کے علی القوائم کسی تراش میں اعظم اور اقل زور معلوم کرو۔ ایک نقشے کے ذریعے تراش پر زور کی حقیقی تقسیم دکھاؤ۔ (بی۔ ایس سی لندن ۱۹۱۰ء)۔

اِس صورت میں راست زور = $\frac{ت}{ب} = \frac{۳۶}{۱ \times ۸} = ۴{,}۵$ ٹن فی مربع انچ۔

اور خماؤ کا معیار = $ت \times لا$ اور دوسرا معیار (معیارِ جمود) = $\frac{۱ \times (۸)^۳}{۱۲} = \frac{۱۲۸}{۳}$

∴ $گ^۲ = \frac{آ}{ب} = \frac{۱۲۸}{۳} \times \frac{۱}{۸} = \frac{۱۶}{۳}$

$$\therefore\quad \text{زت} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}}\left(۱ + \frac{\text{لاقت}}{\text{گ}^۲}\right)$$

$$= ۴٫۵\left(۱ + \frac{۱}{۴}\times ۴ \times \frac{۳}{۱۶}\right)$$

$$= ۴٫۵ \times ۱\frac{۳}{۱۶} = ۵٫۳۴۴ \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

$$\text{زن} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}}\left(\frac{\text{لاقت}}{\text{گ}^۲} - ۱\right)$$

$$= ۴٫۵\left(\frac{۳}{۱۶} - ۱\right)$$

$$= -۴٫۵ \times \frac{۱۳}{۱۶} = -۳٫۶۵۶ \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

زور کی تقسیم شکل ۷۹ کے مطابق ہوگی۔

(۲) ایک کھوکھلے مدوّر ستون کو ایک بریکٹ لگا ہوا ہے جس پر ۵ ٹن کا بوجھ رکھا ہوا ہے۔ اس بوجھ کا مرکز ستون کے مرکز سے ۲ فٹ کے فاصلہ پر ہے۔ ستون کا بیرونی قطر ۱۰ انچ ہے اور موٹائی ۱ انچ۔ اعظم فشاری زور کیا ہوگا۔ (اے۔ ایم۔ آئی۔ سی۔ ای۔ اکتوبر ۱۹۰۵ء)۔

اس صورت میں $\text{ب} = \frac{\pi}{۴}\left(۱۰^۲ - ۸^۲\right) = ۲۸٫۲۸$

$$\text{آ} = \frac{\pi}{۶۴}\left(۱۰^۴ - ۸^۴\right) = ۲۸۹٫۸ \text{ انچ اکائیاں}$$

$$\therefore\quad \text{گ}^۲ = \frac{۲۸۹٫۸}{۲۸٫۲۸} = ۱۰٫۲۵$$

$$\therefore\quad \text{زن} = \frac{\text{ط}}{\text{ب}}\left(۱ + \frac{\text{لاقت}}{\text{گ}^۲}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲۸٫۲۸}\left(۱ + \frac{۵ \times ۲۴}{۱۰٫۲۵}\right)$$

$$= \frac{۱۲٫۷}{۲۸٫۲۸} = ۰٫۴۴۸ \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

$$\text{زت} = \frac{\text{ط}}{\text{ب}}\left(\frac{\text{لاقت}}{\text{گ}^۲} - ۱\right)$$

$$\text{ٹن فی مربع انچ}\quad ٫۳۷۹ = \frac{۱۰٫۷}{۲۸٫۲۸} =$$

$$\frac{\text{گ}^{۲}}{\text{لا}} = \text{ما} = \text{ت ـ مرکا فاصلہ تراش کے مرکز سے}$$

$$\text{انچ}\ ٫۴۲۷ = \frac{۱۰٫۲۵}{۲۴} =$$

زوروں کی تقسیم شکل ۷۹ء میں دکھائی گئی ہے۔

(۳) ایک ساختہ حمالہ کا بازو ایک خلاء گرڈر کی شکل کا ہے ، اور قاعدے کے قریب ایک افقی تراش ایک کھوکھلا مستطیل ہے۔ اس مستطیل کے بیرونی ابعاد ۵۴ انچ × ۳۶ انچ ہیں اور بڑے اور چھوٹے ضلعوں کی موٹائی علی الترتیب ۱ انچ اور ۲ انچ ہے۔ اگر حمالہ کے سرے سے ۲۵ ٹن کا بوجھ لٹکایا جائے جس کا فاصلہ تراش کے مرکز سے ۵۰ فٹ ہو تو اعظم تنشی اور فشاری زور معلوم کرو جو مادے میں پیدا ہوگا۔ ایک نقشے کے ذریعے تراش پر زور کی حالت کے تغیرات دکھاؤ۔ (بی۔ یس سی لندن ۱۹۱۸ء)۔

دیکھو اس سوال میں مستطیل کی تختیوں کے جوڑنے والے ارکان کا ذکر نہیں کیا گیا۔ عملاً ان ارکان کی ضرورت ہوگی۔

گزشتہ مثال کی طرح عمل کرنے سے :-

$$\text{مربع انچ}\ ۲۴۴ = ۱۰۰ \times ۱ + ۷۲ \times ۲ = \text{ب}$$

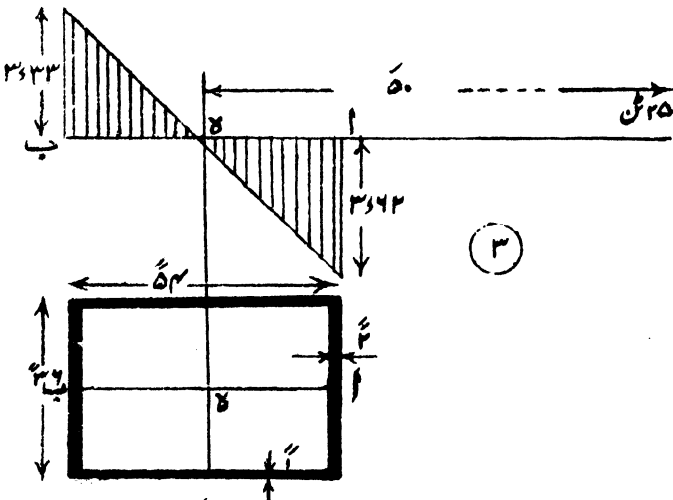
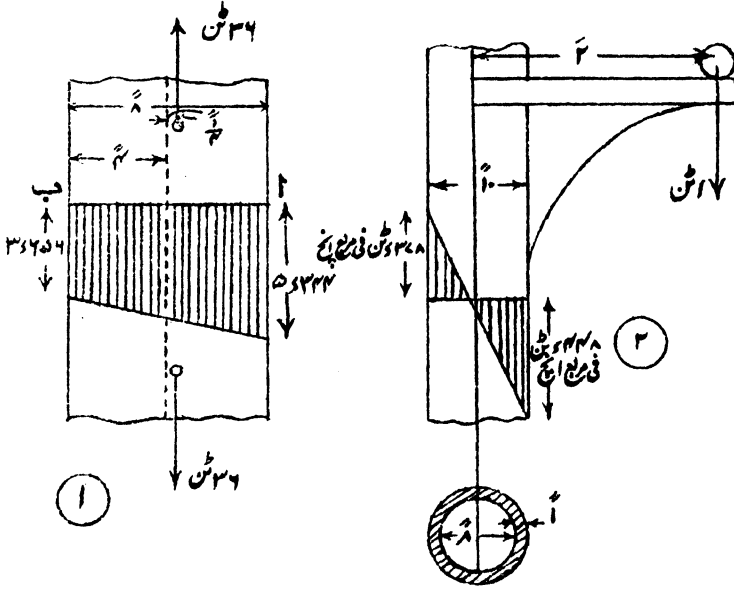
$$۱۱۸۲۰۰ = \frac{{}^{۳}(۵۰) \times ۳۴}{۱۲} - \frac{{}^{۳}(۵۴) \times ۳۶}{۱۲} = \text{آ}$$

$$۴۸۴٫۵ = \frac{۱۱۸۲۰۰}{۲۴۴} = {}^{۲}\text{گ} \quad \therefore$$

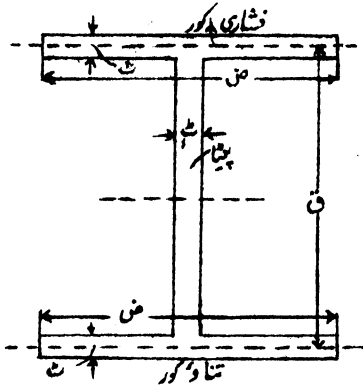
$$\left(\frac{۲۷ \times ۶۰۰}{۴۸۴٫۵} + ۱\right)\frac{۲۵}{۲۴۴} = \text{ز}_{\text{ف}} \quad \therefore$$

$$\text{ٹن فی مربع انچ}\quad ۳٫۶۲ = ۳۴٫۵ \times \frac{۲۵}{۲۴۴} =$$

$$ن_ت = \frac{۲۵}{۲۴۴}\left(۱ - \frac{۲۷ \times ۶۰۰}{۴۸۴۳٫۵}\right) = ۳٫۳۳$$ ٹن فی مربع انچ

زوروں کی تقسیم شکل ۷۹ب میں دکھائی گئی ہے۔

شکل ۷۹ب۔ خماؤ کے زور اور راست زور ایک ساتھ

I تراشوں کے مقیاس کی تقریبی قیمت ـــــ عملاً

گرڈر عموماً I تراش کے بنائے جاتے ہیں کیونکہ سب میں زیادہ باکفایت تراش وہ ہے جس میں مادہ ممکنہ مقدار میں کناروں یا کوروں میں مرتکز کیا گیا ہو۔ اس تراش کے مقیاس کے لیے ایک تقریبی ضابطہ حسب ذیل طریقے پر معلوم کیا جاسکتا ہے:۔ فرض کرو کہ تراش کی کوروں کا درمیانی فاصلہ ق ہے (شکل ۸۰) اور کوروں کی موٹائی ٹ ہے۔ تب اگر کوروں کی چوڑائی ض ہو اور پیٹے کی موٹائی ٹ_1 ہو تو

شکل ۸۰

$$\text{آ} = \frac{\text{ض}\,(\text{ق}+\text{ٹ})^3}{12} - \frac{(\text{ض}-\text{ٹ}_1)(\text{ق}-\text{ٹ})^3}{12} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{یعنی}\quad 12\,\text{آ} = \text{ض}(\text{ق}^3 + 3\,\text{ق}^2\,\text{ٹ} + 3\,\text{ق}\,\text{ٹ}^2 + \text{ٹ}^3)$$

$$-(\text{ض}-\text{ٹ}_1)(\text{ق}^3 - 3\,\text{ق}^2\,\text{ٹ} + 3\,\text{ق}\,\text{ٹ}^2 - \text{ٹ}^3)$$

$$= \text{ض}(6\,\text{ق}^2\,\text{ٹ} + 2\,\text{ٹ}^3) + \text{ٹ}_1(\text{ق}^3 - 3\,\text{ق}^2\,\text{ٹ} + 3\,\text{ق}\,\text{ٹ}^2 - \text{ٹ}^3)$$

$$\therefore \frac{\text{۱۲ آ}}{\text{ق}^{۲}} = \text{۶ض ٹ}\left(\text{۱} + \frac{\text{ٹ}^{۲}}{\text{۲ق}^{۲}}\right) + \text{ٹ}_{۱}\left(\text{ق} - \text{۳ٹ} + \frac{\text{۳ٹ}^{۲}}{\text{ق}} - \frac{\text{ٹ}^{۳}}{\text{ق}^{۲}}\right) \ldots\ldots (۲)$$

اب اگر ٹ بمقابلہ ض کے چھوٹا ہو تو $\frac{\text{ٹ}^{۲}}{\text{ق}^{۲}}$ اور $\frac{\text{ٹ}^{۳}}{\text{ق}^{۳}}$ نظر انداز کرنے کے قابل ہونگے اور اِس طرح

$$\frac{\text{۱۲ آ}}{\text{ق}^{۲}} = \text{۶ض ٹ} + \text{ٹ}_{۱}\,\text{ق}\left(\text{۱} - \frac{\text{۳ٹ}}{\text{ق}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

$$\text{یا} \quad \text{آ} = \frac{\text{ق}^{۲}}{\text{۱۲}}\left\{\text{۶ض ٹ} + \text{ٹ}_{۱}\,\text{ق}\left(\text{۱} - \frac{\text{۳ٹ}}{\text{ق}}\right)\right\}$$

$$\text{اب مق} = \frac{\text{آ}}{\frac{\text{ق+ٹ}}{\text{۲}}} = \frac{\text{۲آ}}{\text{ق+ٹ}} = \frac{\text{۲آ}}{\text{ق}\left(\text{۱}+\frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}\right)}$$

$$= \frac{\text{۲آ}}{\text{ق}}\left(\text{۱} - \frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}\right)$$ تقریباً (کیونکہ ٹ بمقابلہ ق کے چھوٹا ہے)

$$\therefore \text{مق} = \frac{\text{ق}^{۲}}{\text{۶ق}}\left\{\text{۶ض ٹ} + \text{ٹ}_{۱}\,\text{ق}\left(\text{۱} - \frac{\text{۳ٹ}}{\text{ق}}\right)\right\}\left(\text{۱} - \frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}\right)$$

$$= \frac{\text{ق}}{\text{۶}}\left\{\text{۶ض ٹ} - \frac{\text{۶ض ٹ}^{۲}}{\text{ق}} + \text{ٹ}_{۱}\,\text{ق} - \text{۳ٹ ٹ}_{۱} - \text{ٹ ٹ}_{۱} + \frac{\text{۳ٹ}^{۲}\text{ٹ}_{۱}}{\text{ق}}\right\} \ldots (۴)$$

$$= \frac{\text{ق}}{\text{۶}}\left\{\text{۶ض ٹ} + \text{ٹ}_{۱}(\text{ق} - \text{ٹ})\right\}$$ پہلے تقرب تک جس میں $\text{ٹ}^{۲}$ یا $\text{ٹ ٹ}_{۱}$ والی رقمیں نظر انداز کر دی گئی ہیں۔

اب ض × ٹ = ایک کور کا رقبہ = ب

اور $\text{ٹ}_{۱}(\text{ق} - \text{ٹ})$ = پیٹے کا رقبہ = بہ

$$\therefore \text{مق} = \text{ق ب} + \frac{\text{بہ ق}}{\text{۶}}$$

$$= \text{ق}\left(\text{ب} + \frac{\text{بہ}}{\text{۶}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

اس طرح حسب ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے:۔ I تراش کا مقیاس تقریبی طور پر مساوی ہے کودوں کے مرکزوں کے درمیان کی گہرائی ضرب ایک کور اور ۱/۶ پیٹے کا رقبہ۔

انگلستان میں دستور یہ ہے کہ مقیاس حاصل کرتے وقت پیٹے کو بالکل نظر انداز کر دیتے ہیں۔ اس صورت میں مق = ب × ق۔

ان تقریبی قاعدوں کی عددی مثالیں دی جائینگی اور دکھایا جائیگا کہ یہ قاعدے تختی دار اور بکس گرڈروں کی تجویز میں کس حد تک درست ہیں۔

شہتیروں کی نظری اور حقیقی مضبوطیوں کے اختلافات

بہت سے عملی آدمیوں نے اس پر تعجب کا اظہار کیا ہے کہ شہتیروں کی آزمائش میں حقیقی اور نظری شکستی مضبوطیوں میں مطابقت نہیں حاصل ہوتی۔ کئی شہتیروں کا امتحان کیا گیا اور اسی مادے کا ایک تنشی امتحان بھی کیا گیا اور یہ پایا گیا کہ خماؤ کے معمولی نظریے کی رو سے جس بوجھ کو شہتیر میں شکستی زور پیدا کرنا چاہیے وہ شکستگی نہیں پیدا کرتا۔ اس کے لیے مزید بوجھ درکار ہوتا ہے جس کی مقدار تراش کی شکل پر منحصر ہوتی ہے۔ اس سے شہتیر کے سمجھنے کی ابتدا ہوئی اور یہ خیال کیا گیا کہ غالباً مادہ خماؤ میں تناؤ کی نسبت زیادہ مضبوط ہے۔ یہاں تک کہ ایک پرانا غلط نظریہ جس میں مستطیلی شہتیر کے لیے مق کو $\frac{ز \times ض ق^۲}{۶}$ کی بجائے $\frac{ز \times ض ق^۲}{۴}$ مانا گیا ہے شکستی امتحان سے حقیقی نظریے کی نسبت زیادہ مطابقت رکھتا ہے۔

اس عدم مطابقت کی وجہ یہ ہے کہ خماؤ کا معمولی نظریہ شکستی زوروں پر قابل اطلاق ہی نہیں۔ اور اس نظریے میں جو مفروضات اختیار کیے گئے اُن کو سمجھنے کے بعد کوئی بھی نظری اور حقیقی شکستی مضبوطیوں میں مطابقت کی توقع نہیں کر سکتا۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ لچک کی حد کے بعد زور اور فساد متناسب نہیں رہتے۔

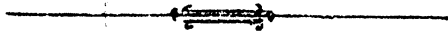
بعض تجربہ کرنے والوں کا جنہوں نے شہتیروں کے انصرافوں کو ناپا ہے بیان ہے کہ نرم فولاد میں لچک کی حد پر بھی مطابقت نہیں ہوتی۔ لیکن اس کی وجہ درحقیقت یہ ہے کہ لچک کی حد اور نقطۂ مغلوبیت کے درمیان مغالطہ ہو جاتا ہے اور یہ وجہ بھی ہے کہ انصراف کافی صحت کے ساتھ نہیں ناپے گئے۔ باب اول میں ہم نے بیان کیا ہے کہ نرم فولاد کے تنشی امتحان میں لچک کی حد اور نقطۂ مغلوبیت بہت قریب قریب واقع ہوتے ہیں۔ لیکن خماؤ میں ایسا نہیں ہوتا بلکہ نقطۂ مغلوبیت لچک کی حد کے خاصا بعد آتا ہے۔ اس لیے ظاہر ہے کہ اگر خماؤ میں نقطۂ مغلوبیت کو لچک کی حد سمجھا جائے تو خاصی غلطی کا امکان ہے۔ اگر لچک کی حد کو احتیاط کے ساتھ ناپا جائے تو یہ پایا جائیگا کہ لچک کی حد پر تناؤ اور خماؤ کے زوروں میں کافی مطابقت ہوتی ہے۔ اینڈریوز و پیرسن[1] کے مضمون میں (جو حمالہ کے آنکڑوں کے زوروں پر لکھا گیا ہے اور جس کا حوالہ اس کتاب کے صفحہ ۲۱۳ پر دیا گیا ہے) یہ نکتہ ضمناً ثابت کیا گیا ہے۔ خماؤ میں نقطۂ مغلوبیت کی لچک کی حد سے کچھ فاصلے پر واقع ہونے کی وجہ یہ ہے کہ خماؤ میں پہلے صرف کناروں کا مادہ نقطۂ مغلوبیت کو پہنچتا ہے اور پوری تراش اس وقت تک مغلوب نہیں ہوگی جب تک کہ مرکز کے قریب کا مادہ بھی نقطۂ مغلوبیت کو نہ پہنچ جائے۔

اس طرح دیکھو جب تک نظریے کی شرائط پوری ہوتی رہیں نظریے اور امتحان میں کوئی اختلاف نہیں ہوتا۔ اگر ایک خاص حد کے بعد ان شرائط کا پورا ہونا موقوف ہو جائے اور ہم چاہیں کہ زوروں کا حساب لگائیں تو ایک نیا نظریہ حاصل کرنا ہوگا۔

شہتیر کی نظری اور حقیقی مضبوطی کے اس اختلاف سے یہ سبق ملتا ہے کہ کامی زور کو لچک کی حد کے زور کی رقوم میں اختیار کیا جائے نہ کہ شکستی زور کی

[1] Andrews-Pearson

(اور یہ ہم باب ۲ میں بھی لکھ چکے ہیں) کیونکہ اگر مثلاً کسی شہتیر کا کامی زور تناؤ کی لچک کی حد کا نصف ہو تو شہتیر کے کامی بوجھ کا دگنا بوجھ لچک کی حد پیدا کریگا۔ لیکن اگر کامی زور تناؤ کے شکستی زور کا چوتھائی لیا جائے تو کامی بوجھ کا چار گنا بوجھ ناکارگی نہیں پیدا کریگا۔ اس کے لیے زیادہ بوجھ درکار ہوگا جو تراش کی شکل پر منحصر ہوگا۔

ساتواں باب

متحرک بوجھوں کے لیے خماؤ کے معیار اور جزی قوتیں

باب ۵ میں ہم نے مختلف قسم کے ثابت بوجھوں کے تحت فصل کے مختلف نقاط پر کے خماؤ کے معیاروں اور جزی قوتوں سے بحث کی ہے۔ اگر لداؤ کا کوئی نظام کسی شہتیر پر اس طرح حرکت کرے کہ ہر ایک بوجھ مختلف اوقات میں فصل کے ہر ممکن مقام پر واقع ہو تو اس طرح کے نظام کو متحرک بوجھوں کا نظام کہا جائیگا۔

بوجھ کے حرکت کرتے وقت شہتیر کی ہر تراشش پر خماؤ کے معیار اور جزی قوت کی قیمت بدلتی ہے ہم شہتیر کی ہر تراش پر بوجھ کے ہر محل کے لیے خماؤ کے معیار اور جزی قوت کی قیمت معلوم کرنے کی کوشش نہیں کرینگے بلکہ یہ دیکھینگے کہ عبور کے دوران میں کسی نقطے پر ان کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ہوتی ہے۔ اس طرح متحرک بوجھوں کے لیے خماؤ کے معیار اور جز کے جو نقشے حاصل ہونگے وہ ان قیمتوں کو تعبیر نہیں کرینگے جو ایک ہی وقت میں واقع ہوتی ہیں بلکہ ہر تراشش پر اس اعظم قیمت کو تعبیر کرینگے جو بوجھ کے کسی محل کے لیے اس تراشش پر ممکن ہے۔

ہم صرف سادہ سہارے ہوئے شہتیروں پر غور کرینگے۔ برآمدہ برموں پر متحرک بوجھ شاذ و نادر ہی آتے ہیں اور اگر آئیں بھی تو اعظم خماؤ کا معیار اور جز

اُس وقت واقع ہوتے ہیں جب کہ بوجھ عین آزاد سرے پر ہو۔

ذیل کی معیاری صورتوں پر غور کرو:-

(۱) ایک منفرد بوجھ۔۔۔۔ فرض کرو کہ ایک منفرد بوجھ و

شکل ۱۳۰ (۱) ایک شہتیر ا ب کو جس کا فصل ل ہے بائیں جانب سے دائیں جانب عبور کرتا ہے۔

جزی نقشہ۔۔۔۔ فرض کرو کہ بوجھ نقطہ ط پر ہے جو ب سے فاصلہ ما پر ہے اور نقطہ ج کی طرف حرکت کر رہا ہے۔ جو ب سے فاصلہ لا پر ہے۔

$$\text{تب ج پر جزی قوت} = ج_ج = ر_ب = \frac{و(ل-ما)}{ل}$$

$$= و - \frac{و\,ما}{ل}$$

یہ زیادہ سے زیادہ ہوگا جب کہ ما کم سے کم ہوگا اس سے معلوم ہوا کہ بوجھ کے ج کی طرف حرکت کرنے سے جز بڑھتا ہے۔ اعظم قیمت اُس وقت واقع ہوگی جب کہ بوجھ ج پر پہنچ جائیگا اور یہ قیمت $\frac{و(ل-لا)}{ل}$ ہوگی۔

اب فرض کرو کہ بوجھ ج سے آگے نقطہ ط پر ہے جو ب سے فاصلہ ی پر ہے۔

$$\text{تب } ج_ج = ر_ب - و$$

$$= \frac{و(ل-ی)}{ل} - و$$

$$= -\frac{و\,ی}{ل}$$

یہ عددی طور پر اعظم ہوگا جب کہ ی اعظم ہوگا یعنی جب کہ ی = لا۔اس سے

معلوم ہوا کہ بوجھ کے ج تک پہنچنے تک ج پر جز کی قیمت بڑھتی ہے۔ ج سے گزرنے پر جز کی قیمت ایک دم بدل کر منفی اعظم ہوجاتی ہے۔ اور بوجھ اور آگے بڑھے تو یہ قیمت عددی طور پر گھٹتی ہے۔

ج پر اعظم مثبت جز $= \frac{و(ل - لا)}{ل}$ ۔ یہ ج کے ا سے فاصلہ کے متناسب ہے۔ اِس طرح آتے ہوئے بوجھ کے تحت اعظم جز کا نقشہ ایک خطِ مستقیم ا ف ہوگا۔ جہاں ف ب$_ا$ = و۔

ج پر اعظم منفی جز $= - \frac{و لا}{ل}$ ۔ یہ ج کے ب سے فاصلے کے تناسب ہے۔ اور اِس طرح ہٹتے ہوئے بوجھ کے تحت اعظم جز کا نقشہ ایک خطِ مستقیم ب$_ا$ د ہوگا جہاں ا$_ا$ د = و۔

اِن نقشوں کا استعمال حسب ذیل ہے:۔ خط ا ب پر کوئی نقطہ م لو اور فرض کرو کہ م میں کا انتصابی خط جز کے نقشے کو ص اور س پر قطع کرتا ہے۔ تب نقطہ م پر م ص اعظم مثبت جز ہے اور م س اعظم منفی جز اور جز کی مجموعی وسعت ص س ہے۔

خماؤ کے معیار کا نقشہ — آتے ہوئے بوجھ کے لیے ج پر

خماؤ کا معیار $= م_ج = س_ب \times لا$

یہ اعظم ہوگا جب کہ $س_ب$ اعظم ہوگا یعنی جب کہ بوجھ ج پر ہو۔

ہٹتے ہوئے بوجھ کے لیے $م_ج = س_ب \times لا - و\,(لا - ی)$

$$= \frac{و(ل - ی)}{ل} \times لا - و\,(لا - ی)$$

$$= و\,ی - \frac{و\,ی\,لا}{ل} = و\,ی\,(1 - \frac{لا}{ل})$$

یہ اعظم ہوگا جب کہ ی اعظم ہو اور ہمیشہ مثبت ہوگا کیونکہ لا ہمیشہ > ل

جس کی وجہ سے $(1-\frac{لا}{ل})$ کبھی منفی نہیں ہو سکتا۔

$$\text{جب}\quad ی = لا \quad \text{تو}\quad م_ج = ولا\left(1-\frac{لا}{ل}\right) = \frac{و(ل-لا)لا}{ل}$$

$$= م_ب \times لا$$

اس لیے خماؤ کا معیار نقطہ ج کے آنے تک بڑھتا جائیگا اور ج سے گزر کر ہٹتے وقت گھٹتا جائیگا۔

اس طرح $م_ج$ کی اعظم قیمت $= ولا - \frac{ولا^2}{ل}$

یہ لاؔ پر منحصر ہے اس لیے اعظم خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مکافی ہوگا جس کا اعظم معین مرکز پر ہوگا اور $\frac{ول}{2} - \frac{و(\frac{ل}{2})^2}{ل} = \frac{ول}{4}$ ہوگا۔

یہ نقشہ شکل ۱۸۱ (۱) میں ا ع ب سے تعبیر کیا گیا ہے۔
اگر بوجھ دائیں سے بائیں کو حرکت کرے تو بھی نقشے یہی رہینگے کیونکہ خواہ بوجھ آرہا ہو اور نقطہ ط پر پہنچے یا ج سے ہٹ رہا ہو اور ط پر پہنچے دونوں صورتوں میں ج پر جز اور خماؤ کا معیار وہی ہونگے۔

(۲) یکساں بوجھ فصل سے بڑا ——— فرض کرو کہ ایک یکساں بوجھ جو فصل سے بڑا ہے اور جس کی حدت ب ٹن فی طولی فٹ ہے فصل ل کے ایک شہتیر ا ب پر بائیں سے دائیں کو حرکت کرتا ہے۔ دیکھو شکل ۱۸۱ (۲)۔
جز کا نقشہ ——— ا سے فاصلہ لا پر کے ایک نقطہ ج پر غور کرو اور فرض کرو کہ بوجھ کا آگے کا سرا نقطہ ط تک پہنچا ہے جو ا سے فاصلہ ما پر ہے۔

$$\text{تب}\quad ج = م_ب = \frac{ب\,ما^2}{2ل}$$

شکل ۱۸۰۔ متحرک بوجھ

یہ ما کے ساتھ بڑھتا ہے اس لیے ج پر اعظم جز اُس وقت ہوگا جب کہ بوجھ کا اگلا سرا ج تک پہنچے۔

اب فرض کرو کہ بوجھ کا اگلا سرا ج سے بقدر فاصلہ ی کے بڑھ گیا ہے۔

تب

$$ج_ج = م_ب - ب \times ی$$

$$= \frac{ب(لا+ی)^۲}{۲ل} - ب ی$$

$$= ب\left\{\frac{لا^۲ + ۲لا ی + ی^۲}{۲ل} - ی\right\}$$

$$= ب\left\{\frac{لا^۲}{۲ل} + \frac{۲لا ی}{۲ل} + \frac{ی^۲}{۲ل} - ی\right\}$$

$$= \frac{ب لا^۲}{۲ل} - ب ی\left\{۱ - \frac{ی}{۲ل} - \frac{لا}{ل}\right\}$$

اس میں $\left(۱ - \frac{ی}{۲ل} - \frac{لا}{ل}\right)$ مثبت ہوگا اگر ۲ل > ی + ۲لا کیونکہ یہ مقدار $\frac{۲ل - (ی + ۲لا)}{۲ل}$ کے مساوی ہے۔

اور یہ شرط ہمیشہ پوری ہوگی کیونکہ ل چھوٹا نہیں ہوسکتا لا + ی سے اور اس طرح ۲ ل لازماً بڑا ہوگا ۲ لا + ی سے۔

اس سے معلوم ہوا کہ ی کے بڑھنے سے ج گھٹیگا۔ اس طرح جز کی اعظم قیمت اُس وقت واقع ہوگی جب کہ ی صفر ہو یعنی جب کہ بوجھ کا اگلا سرا دیے ہوئے نقطے کے عین اوپر ہو۔

ج پر اعظم منفی جز اس وقت واقع ہوگا جب کہ بوجھ کا پچھلا سرا ج سے ابھی گزر چکا ہو کیونکہ بوجھ کا یہ محل ایسا ہے گویا بوجھ دوسری سمت سے نقطہ تک پہنچا ہے۔

$$\text{اِس لیے ج پر اعظم مثبت جز} = \frac{\text{ب لا}^2}{2\,\text{ل}}$$

$$\text{〃 〃 〃 منفی 〃} = \frac{\text{ب (ل - لا)}^2}{2\,\text{ل}}$$

اس طرح اعظم جز کے منحنی مکافی ہونگے جن کے راس ا اور ب ہونگے اور سروں کے معین $\frac{\text{ب ل}}{2} = \frac{\text{و}}{2}$ ہونگے۔

حسب سابق اگر فصل پر کوئی نقطہ م لیا جائے تو م ص اور م ر سے علی الترتیب اعظم مثبت اور اعظم منفی جز بتعبیر ہونگے اور ص ر سے جز کی مجموعی وسعت۔

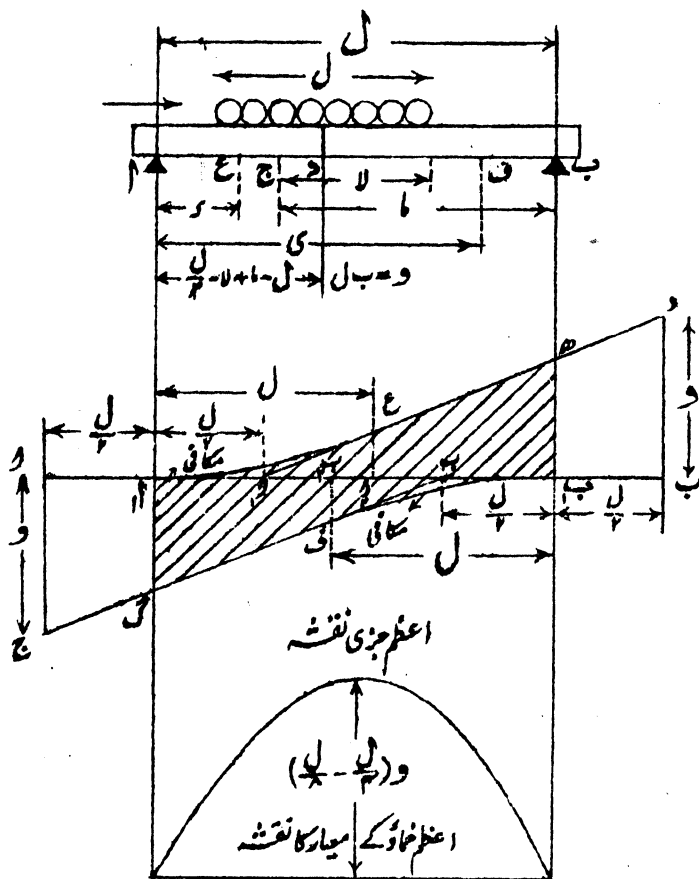
خماؤ کے معیار کا نقشہ ——— بوجھ کا اگلا سرا جب ط تک پہنچا ہو تو $\text{م}_\text{ج}$ = سا ب (ل - لا)۔ اگر بوجھ ذرا آگے بڑھ کر ط_1 تک پہنچے تو سا ب کی قیمت بڑھیگی اور اِس طرح بوجھ کے آگے بڑھنے سے خماؤ کا معیار بڑھیگا۔ اور یہ ہر تراشں کے لیے درست ہے یعنی اُن تراشوں کے لیے بھی جن کو بوجھ ڈھانک چکا ہو مثلاً ط کیونکہ $\text{م}_\text{ط}$ = سا_1 × ما - $\frac{\text{ب ما}^2}{2}$ اور بوجھ کے آگے بڑھنے سے سا_1 بڑھتا ہے۔

اِس لیے معلوم ہوا کہ ہر نقطے پر خماؤ کا معیار اس وقت اعظم ہوگا جبکہ پورا فصل ڈھنک جائے۔ اِس طرح اعظم خماؤ کے معیار کا منحنی ایک مکافی ہوگا جس کا اعظم معین $= \frac{\text{ب ل}^2}{8} = \frac{\text{و ل}}{8}$

(۳) **یکساں بوجھ فصل سے چھوٹا** ——— فرض کرو کہ ایک یکساں بوجھ جس کا طول ل ہے اور حدت ب ٹن فی طولی فٹ ہے ایک شہتیر ا ب پر جس کا فصل ل ہے بائیں سے دائیں کو حرکت کرتا ہے (دیکھو شکل ۸۲)

جز کا نقشہ — بالکل گزشتہ صورت کے استدلال سے نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی نقطے پر اعظم مثبت جز اُس وقت واقع ہوگا جب کہ بوجھ کا اگلا سرا اُس نقطے تک پہنچے۔ اور اعظم منفی جز اُس وقت ہوگا جب کہ پچھلا سرا نقطے سے گزرنے کو ہو۔

شکل ۸۲
یکساں متحرک بوجھ فصل سے چھوٹا

اب ا سے فاصلہ ی پر ایک نقطہ ع پر غور کرو جہاں ی < ل۔ جع کی اعظم مثبت قیمت اُس وقت ہوگی جب کہ بوجھ کا اگلا سرا ع تک

پہنچے، اور یہ قیمت $\frac{ب ی^2}{2 ل}$ ہوگی۔ یہ بالکل گزشتہ صورت کی طرح ہے کیونکہ ع تک پورا بوجھ فصل پر نہیں آیا ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ ا سے فاصلہ ل تک جزکا نقشہ ایک مکافی ہوگا۔

اب ا سے فاصلہ ی پر نقطہ ف لو جہاں ی > ل

$$ج_ف \text{ کی اعظم قیمت} = ر_ب = \frac{ب ل (ی - \frac{ل}{2})}{ل} = \frac{و (ی - \frac{ل}{2})}{ل}$$

جہاں و مجموعی بوجھ ہے۔

$$\therefore ج_ب = \frac{و (ل - \frac{ل}{2})}{ل} = و \left(1 - \frac{ل}{2 ل}\right)$$

$ج_ف$ کے جملے میں ی کی صرف پہلی قوت شریک ہوتی ہے اس لیے ا سے بوجھ کے سرے سے پرے کے نقطوں کے لیے جزکا نقشہ ایک خطِ مستقیم ہوگا۔

اگر اس خطِ مستقیم کو خارج کیا جائے تو خط ا ب کو کس نقطے پر ملیگا یہ معلوم کرنے کے لیے یہ دیکھنا ہوگا کہ ی کی کس قیمت کے لیے $ج_ف$ صفر ہوتا ہے، یہ قیمت ی = $\frac{ل}{2}$ ہے۔

اِن نتائج سے اعظم جزکا نقشہ کھینچنے کے لیے حسب ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے:-

ا اور ب دونوں کے دونوں طرف فاصلہ $\frac{ل}{2}$ پر نقاط و، ا اور ب، ب لو۔ اور فصل کے اندر ا اور ب سے فاصلہ ل پر نقاط ا اور ب ۔

انتصابی خط ب د اوپر کی طرف کھینچو جو و کو تعبیر کرے اور انتصابی خط ا ج نیچے کی طرف کھینچو جو بھی و کو تعبیر کرے۔ اور ج ب اور د ا کو ملاؤ۔ فرض کرو کہ یہ ا اور ب میں کے انتصابی خطوط کو ع اور ف پر ملتے ہیں۔ تب ع میں سے ایک مکافی کھینچو جس کا راس ا ہو، اور ف میں سے ایک

مکانی کھینچو جس کا راس ب۱ ہو۔ تب ھ ع ۱۱ اور گ ف ب۱ اعظم جز کے
منحنی ہونگے، اور ان کا طریق استعمال اوپر کی دو صورتوں کی طرح ہوگا۔

خماؤ کے معیار کا نقشہ — فرض کرو کہ بوجھ کا مرکز نقطہ د پر آیا ہے اور بوجھ کا اگلا سرا ج سے فاصلہ لا پر ہے جہاں ج کا فاصلہ ب سے ما ہے۔

$$\text{تب}\quad \text{ر}_{\text{ب}} = \frac{\text{ب ل} \times \text{ا د}}{\text{ل}} = \frac{\text{ب ل}}{\text{ل}}\left(\text{ل} - \text{ما} + \text{لا} - \frac{\text{ل}}{۲}\right)$$

$$\text{ج پر خماؤ کا معیار} = \text{م}_{\text{ج}} = \text{ر}_{\text{ب}} \times \text{ما} - \frac{\text{ب لا}^{۲}}{۲}$$

$$= \frac{\text{ب ل ما}}{\text{ل}}\left(\text{ل} - \text{ما} + \text{لا} - \frac{\text{ل}}{۲}\right) - \frac{\text{ب لا}^{۲}}{۲} \quad \cdots\cdots (۱)$$

$$\text{یہ اعظم ہوگا جب کہ}\quad \frac{\text{ف م}_{\text{ج}}}{\text{ف لا}} = ۰$$

$$\text{یعنی جب کہ}\quad \frac{\text{ب ل ما}}{\text{ل}} - \text{ب لا} = ۰$$

$$\text{یا}\quad \text{لا} = \frac{\text{ل ما}}{\text{ل}}$$

$$\text{یا}\quad \frac{\text{لا}}{\text{ل}} = \frac{\text{ما}}{\text{ل}}$$

اِس سے ذیل کا قاعدہ حاصل ہوتا ہے:۔ کسی نقطے پر خماؤ کا معیار اُس وقت اعظم ہوگا جب کہ بوجھ اس نقطے سے اُسی نسبت میں تقسیم ہو جس میں کہ فصل تقسیم ہوتا ہے۔

∴ اس ربط کو م ج کی قیمت (۱) میں درج کرنے سے م ج کی اعظم

$$\text{قیمت} = \frac{\text{ب ل ما}}{\text{ل}}\left\{\text{ل} - \text{ما} + \frac{\text{ل ما}}{\text{ل}} - \frac{\text{ل}}{۲}\right\} - \frac{\text{ب ل}^{۲}\text{ ما}^{۲}}{۲\text{ ل}^{۲}}$$

$$= \frac{ب ل ا}{ل} \left\{ ل - ا + \frac{ل ا}{۲ ل} - \frac{ل}{۲} \right\}$$

$$= \frac{و ا}{ل} (ل - ا) \left(۱ - \frac{ل}{۲ ل}\right)$$

اس میں $ا^۲$ شریک ہوتا ہے، اس لیے اعظم خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مکافی ہوگا۔

اس مکافی کا اعظم معین $ا = \frac{ل}{۲}$ پر ہوگا اور حسب ذیل ہوگا:—

$$\frac{و ل}{۲ ل} \left(\frac{ل}{۲}\right) \left(۱ - \frac{ل}{۲ ل}\right) = \frac{و ل}{۴} \left(۱ - \frac{ل}{۲ ل}\right)$$

$$= \frac{و ل}{۴} - \frac{و ل}{۸}$$

یہ دیکھنا دلچسپی سے خالی نہیں کہ اگر ل = ۰ ہو جائے تو جز اور خماؤ کے معیار کے نقشے بالکل صورت (۱) کے مطابق ہو جاتے ہیں، اور اگر ل = ل تو بالکل صورت (۲) کے مطابق ہوتے ہیں۔

(۴) دو منفرد بوجھ ایک ثابت باہمی فاصلے پر —— فرض کرو کہ دو منفرد بوجھ $و_۱$ اور $و_۲$ جن کا باہمی فاصلہ ل ہے ایک فصل ا ب کو عبور کرتے ہیں (شکل ۸۳)۔ تب حاصل بوجھ $و = و_۱ + و_۲$ ہوگا اور بوجھوں سے فاصلوں ك اور ب پر نقطہ ط پر عمل کریگا جہاں $\frac{و_۱}{و_۲} = \frac{ب}{ك}$

جز کا نقشہ —— ا سے فاصلہ ا پر نقطہ ج پر غور کرو۔ اگر سامنے کا بوجھ ج تک نہیں پہنچا ہے اور ط کا ا سے فاصلہ لا ہے تو

$$ج_ج = \frac{و \times لا}{ل}$$

یہ لا کے ساتھ بڑھتا ہے اور اس طرح $\text{ج}_{\text{ج}}$ ذیل کی قیمت تک بڑھیگا

$$\text{ج}_{\text{ج}} = \frac{\text{و}\,(\text{ما}-\text{ب})}{\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اب فرض کرو کہ بوجھ ایسے محل میں پہنچے ہیں کہ ج. بوجھ $\text{و}_{۲}$ اور نقطہ ط کے درمیان ہے اور فرض کرو کہ آگے کا بوجھ ج سے بقدر فاصلہ ج کے آگے نکل گیا ہے۔

تب $\text{ج}_{\text{ج}} = \text{ر}_{\text{ب}} - \text{و}_{۲}$

$$= \frac{\text{و}\,(\text{ما}+\text{ج}-\text{ب})}{\text{ل}} - \text{و}_{۲}$$

یہ ج کے بڑھنے سے بڑھتا ہے اور اعظم ہوتا ہے جبکہ ج = ب

اس صورت میں

$$\text{ج}_{\text{ج}} = \frac{\text{و}\,\text{ما}}{\text{ل}} - \text{و}_{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

یہ (۱) سے بڑا ہوگا اگر

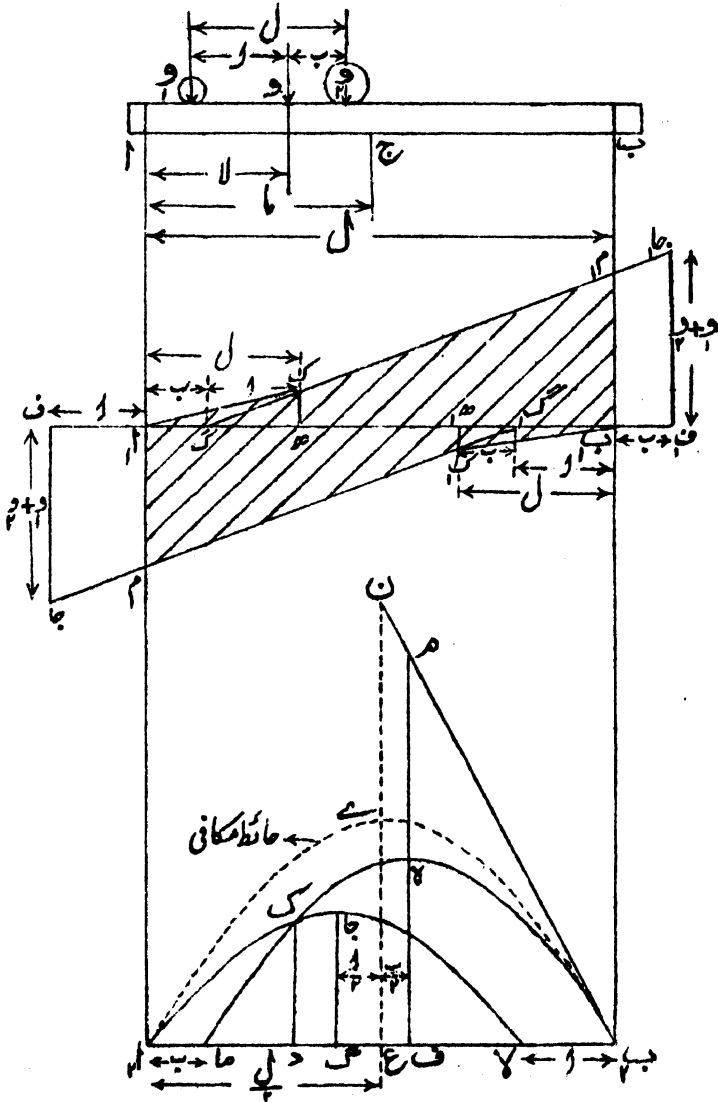
$$\frac{\text{و}\,\text{ب}}{\text{ل}} > \text{و}_{۲}$$

یا $$\frac{\text{ل}}{\text{ب}} < \frac{\text{و}}{\text{و}_{۲}}$$

یا $$\frac{\text{ل}}{\text{ب}} < ۱ + \frac{\text{و}_{۱}}{\text{و}_{۲}}$$

اِس طرح دیکھو یہ بحث دو صورتوں میں بٹ جاتی ہے۔

اگر $\frac{\text{ل}}{\text{ب}} < ۱ + \frac{\text{و}_{۱}}{\text{و}_{۲}}$ تو ج پر اعظم جز اُس وقت واقع ہوگا جبکہ

ط نقطہ ج پر پہنچے۔ اور اگر $\frac{ل}{ب} > ۱ + \frac{و_۱}{و_۲}$ تو اعظم جز اُس وقت واقع ہوگا جب کہ آگے کا بوجھ ج تک پہنچے۔ چونکہ عملاً $\frac{ل}{ب}$ ہمیشہ $۱ + \frac{و_۱}{و_۲}$ سے بڑا ہوگا

شکل ۸۳۔ دو منفرد متحرک بوجھ باہم ثابت فاصلہ پر

اس لیے ہم بحث کو اسی صورت تک محدود رکھیںگے۔

$$\therefore \text{ ج}_{\text{ج}} \text{ کی اعظم قیمت} = \frac{\text{و (ا - ب)}}{\text{ل}}$$

اب فرض کرو کہ بوجھ ایسے محل میں پہنچا ہے کہ ج نقطہ ط اور و کے درمیان ہے اور فرض کرو کہ ط نقطہ ج سے بقدر فاصلہ د کے آگے بڑھ گیا ہے۔

$$\text{تب} \quad \text{ج}_{\text{ج}} = \text{ر}_{\text{ب}} - \text{و}_{۲}$$

$$= \frac{\text{و (ا + د)}}{\text{ل}} - \text{و}_{۲}$$

یہ د کے بڑھنے سے بڑھتا ہے، اور اس طرح اعظم قیمت اس وقت ہوگی جب کہ د = ا

$$\text{اس طرح} \quad \text{ج}_{\text{ج}} = \frac{\text{و (ا + ا)}}{\text{ل}} - \text{و}_{۲} \quad \text{.........} \quad (۳)$$

اب فرض کرو کہ بوجھ و۱ نقطہ ج سے بقدر فاصلہ ع کے آگے نکل گیا ہے۔

$$\text{تب} \quad \text{ج}_{\text{ج}} = \text{ر}_{\text{ب}} - \text{و}$$

$$= \frac{\text{و (ا + ا + ع)}}{\text{ل}} - \text{و}$$

$$= -\frac{\text{و}}{\text{ل}} \left[\text{ل} - \text{(ا + ا + ع)}\right]$$

یہ ہمیشہ منفی ہوگا اور اس کی عددی قیمت اس وقت اعظم ہوگی جب کہ ع = ۰ اور اس وقت

$$\text{ج}_{\text{ج}} = -\frac{\text{و}}{\text{ل}} \left[\text{ل} - \text{(ا + ا)}\right] \quad \text{.........} \quad (۴)$$

نتائج (۲) اور (۴) سے معلوم ہوتا ہے کہ ج پر کے اعظم جز ما کے خطی تفاعل ہیں اور اس طرح جز کے نقشے خطوط مستقیم ہونگے۔ لیکن یہ معلوم ہو کہ ا اور ب کے قریب فاصلہ ل تک ایک وقت میں صرف ایک بوجھ فصل پر ہوتا ہے۔ ان فاصلوں کے لیے اعظم جز کے نقشے حسب ذیل طریقے پر حاصل ہونگے:۔

ا سے فصل کے باہر اور اندر علی الترتیب فاصلہ ۱ اور ب پر نقاط ف اور گ لو۔ اور اسی طرح ب سے فاصلوں ب اور ۱ پر نقاط ف۱ اور گ۱ لو۔ ف جا = و = و۱ + و۲ قائم کرو، اور ف۱ جا۱ اسی کے مساوی کھینچو اور جا گ اور جا۱ گ۱ کو ملاؤ۔

پھر ا اور ب۱ سے فاصلہ ل پر فصل پر نقطے ھ، ھ۱ لو اور فرض کرو کہ ھ اور ھ۱ میں کے انتصابی خطوط جا گ اور جا۱ گ۱ کو ک اور ک۱ پر قطع کرتے ہیں۔ اور ا ک اور ب۱ ک۱ کو ملاؤ۔ تب اگر جا گ اور جا۱ گ۱ نقاط ب۱ اور ا میں کے انتصابی خطوط کو م۱ اور م پر قطع کریں تو اعظم جز کے منحنی ا ک م اور ب۱ ک۱ م۱ ہونگے۔

خماؤ کے معیار کے نقشے ——— ان صورتوں پر غور کرو جن پر جز کے سلسلے میں غور کیا گیا ہے۔ اگر اگلا بوجھ ج کے قریب آرہا ہو اور ط کا فاصلہ ا سے لا ہو تو

$$\text{ھج} = \frac{\text{و لا}}{\text{ل}} (\text{ل} - \text{ما})$$

یہ لا کے بڑھنے سے بڑھتا ہے اور اس کی اعظم قیمت یہ ہوگی:۔

$$\frac{\text{و}(\text{ما} - \text{ب})(\text{ل} - \text{ما})}{\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

اب فرض کرو کہ بوجھوں کا عمل ایسا ہے کہ ج بوجھ و۲ اور ط کے درمیان ہے اور فرض کرو کہ و۲ نقطہ ج سے بقدر فاصلہ ج کے آگے ہے۔

تب $\text{م}_{\text{ج}} = \text{ر}_{\text{ب}}(\text{ل}-\text{ا}) - \text{و}_{2} \times \text{ج}$

$$= \frac{\text{و}(\text{ا}+\text{ج}-\text{ب})(\text{ل}-\text{ا})}{\text{ل}} - \text{و}_{2}\,\text{ج} \quad \ldots\ldots (۶)$$

یہ ج کے بڑھنے سے بڑھیگا اگر $\frac{\text{و}_{1}}{\text{و}} > \frac{\text{ا}}{\text{ل}}$ اور گھٹیگا اگر $\frac{\text{و}_{1}}{\text{و}} < \frac{\text{ا}}{\text{ل}}$

اب فرض کرو کہ بوجھ اس طرح ہیں کہ ج نقطہ ط اور و۱ کے درمیان ہے اور فرض کرو کہ ط نقطہ ج سے بقدر فاصلہ د کے آگے ہے۔

تب $\text{م}_{\text{ج}} = \text{ر}_{\text{ب}}(\text{ل}-\text{ا}) - \text{و}_{2}(\text{ب}+\text{د})$

$$= \frac{\text{و}(\text{ا}+\text{د})}{\text{ل}}(\text{ل}-\text{ا}) - \text{و}_{2}(\text{ب}+\text{د}) \quad \ldots\ldots (۷)$$

اس کا بڑھنا اور گھٹنا بھی (۶) کی طرح ہے۔

آخر میں فرض کرو کہ بوجھ و۱ نقطہ ج سے بقدر فاصلہ ع کے نکل گیا ہے۔

تب $\text{م}_{\text{ج}} = \text{ر}_{\text{ب}}(\text{ل}-\text{ا}) - \text{و}(\text{ا}+\text{ع})$

$$= \frac{\text{و}(\text{ا}+\text{ا}+\text{ع})(\text{ل}-\text{ا})}{\text{ل}} - \text{و}(\text{ا}+\text{ع})$$

$$= \frac{\text{و}\,\text{ا}(\text{ل}-\text{ا})}{\text{ل}} + \frac{\text{و}(\text{ا}+\text{ع})(\text{ل}-\text{ا})}{\text{ل}} - \text{و}(\text{ا}+\text{ع})$$

$$= \frac{\text{و}\,\text{ا}(\text{ل}-\text{ا})}{\text{ل}} - \frac{\text{و}(\text{ا}+\text{ع})\,\text{ا}}{\text{ل}}$$

یہ ع کے بڑھنے سے گھٹتا ہے، اِس لیے خماؤ کے معیار کی اعظم قیمت ع = ۰ پر واقع ہوگی اور حسبِ ذیل ہوگی:—

$$\text{مج} = \frac{\text{و ما (ل − ما)}}{\text{ل}} - \frac{\text{و ا ما}}{\text{ل}}$$

$$= \frac{\text{و ما (ل − ما − ا)}}{\text{ل}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (۸)$$

اور مساوات (۵) سے یعنی جب کہ بوجھ و۲ نقطہ ج پر آئے

$$\text{مج} = \frac{\text{و (ما − ب) (ل − ما)}}{\text{ل}}$$

$$= \frac{\text{و ما (ل − ما)}}{\text{ل}} - \frac{\text{و ب (ل − ما)}}{\text{ل}}$$

∵ (۵) اور (۸) میں (۵) یا (۸) بڑا ہوگا بمطابقت اس کے کہ

$\frac{\text{و ا ما}}{\text{ل}}$ بڑا ہے یا مساوی ہے یا چھوٹا ہے $\frac{\text{و ب (ل − ما)}}{\text{ل}}$ سے

یعنی ا ما ″ ″ ″ ″ ″ ب (ل − ما) ″

″ ما (ا + ب) ″ ″ ″ ″ ″ ب ل ″

″ $\frac{\text{ما}}{\text{ل}}$ ″ ″ ″ ″ ″ $\frac{\text{ب}}{\text{ا + ب}}$ ″

″ $\frac{\text{ما}}{\text{ل}}$ ″ ″ ″ ″ ″ $\frac{\text{و}_2}{\text{و}}$ ″

اس لیے نتائج (۵) تا (۸) سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر $\frac{\text{ما}}{\text{ل}} > \frac{\text{و}_2}{\text{و}}$ تو کسی نقطے پہ اعظم خماؤ کا معیار اس وقت ہوتا ہے جب کہ و۲ اس نقطے پر ہو۔ لیکن اگر $\frac{\text{ما}}{\text{ل}} < \frac{\text{و}_2}{\text{و}}$ تو اعظم خماؤ کا معیار اس وقت ہوگا جب کہ و۱ اس نقطے پر ہو۔

فرض کرو کہ د ایک ایسا نقطہ ہے کہ $\frac{\text{ا}_1\text{د}}{\text{ا}_1\text{ب}_1} = \frac{\text{و}_2}{\text{و}}$، تب ا۱ اور د کے درمیان کسی نقطے پر خماؤ کا معیارِ اعظم اس وقت ہوگا جب کہ و۱ اس نقطے پر ہو اور

ذ اور $ب_۲$ کے درمیان کسی نقطے پر اُس وقت جب کہ $و_۲$ اس نقطے پر ہو۔

دیکھو (۵) اور (۸) کو تعبیر کرنے والے منحنی مکافی ہونگے، اس لیے خماؤ کے معیار کے منحنیوں کو کھینچنے کا طریقہ حسب ذیل ہوگا:—

پہلے مساوات (۵) کے مکافی پر غور کرو۔

اس کی صفر قیمت ما = ب پر ہوتی ہے اور اعظم قیمت $ما = \frac{ل}{۲} + \frac{ب}{۲}$ پر ہوتی ہے اور خماؤ کے معیار کی یہ اعظم قیمت

$$= \frac{و}{ل}\left(\frac{ل}{۲} - \frac{ب}{۲}\right)^۲ = \frac{و}{۴ل}(ل - ب)^۲$$

اس لیے $ا_۲$ سے فاصلہ ب پر نقطہ ما لو اور فصل کے وسطی نقطہ ع سے فاصلہ $\frac{ب}{۲}$ پر دائیں طرف نقطہ ف لو۔ ف لا قائم کرو جو کسی مناسب پیمانے پر $\frac{و}{۴ل}(ل - ب)^۲$ کو تعبیر کرے اور مکافی ما لا $ب_۲$ کھینچو جس کا راس لا ہو۔

اب مساوات (۸) کے مکافی پر غور کرو۔

اس کی صفر قیمت ما = ل - ا پر ہوتی ہے اور اعظم قیمت $ما = \frac{ل}{۲} - \frac{ا}{۲}$ پر ہوتی ہے اور حسب ذیل ہوتی ہے:—

$$\frac{و\left(\frac{ل}{۲} - \frac{ا}{۲}\right)}{ل}\left(ل - \frac{ل}{۲} + \frac{ا}{۲} - ا\right) = \frac{و\left(\frac{ل}{۲} - \frac{ا}{۲}\right)^۲}{ل} = \frac{و}{۴ل}(ل - ا)^۲$$

اس لیے $ب_۲$ سے فاصلہ ا پر ایک نقطہ لا لو اور ع سے فاصلہ $\frac{ا}{۲}$ پر بائیں طرف نقطہ گ لو، اور $گ جا = \frac{و}{۴ل}(ل - ا)^۲$ قائم کرو اور مکافی $ا_۲$ جا لا قائم کرو جس کا راس جا ہو۔

یہ دونوں مکافی ک پر ملینگے، اور اس طرح اعظم خماؤ کے معیار کا منحنی $ا_۲$ ک لا $ب_۲$ ہوگا۔

معادل یکساں بوجھ ۔ حائط مکافی ۔ گرڈروں کی تجویزیں دستور یہ ہے کہ متحرک بوجھوں سے پیدا ہونے والے اعظم خماؤ کے معیار کو ایک معادل متحرک یکساں بوجھ کی رقوم میں بیان کیا جائے۔ اور یہ اس طرح ہوسکتا ہے کہ ایک ایسا مکافی معلوم کیا جائے جو متحرک بوجھ کے اعظم خماؤ کے معیار کے منحنی کو عین گھیر لے۔ اس کے لیے حسب ذیل عمل کیا جائیگا:۔ دونوں مکافیوں میں کے بڑے مکافی کا ب ہ پر کا مماس کھینچو اور یہ اس طرح کہ ہ ھ = ہ ف بناؤ اور ب ھ کو ملاؤ۔ فرض کرو کہ یہ خارج ہوکر ع میں کے انتصابی خط کو ن پر ملتا ہے اور ع سے = $\frac{1}{2}$ ع ن بناؤ۔ تب مکافی ا سے ب جس کا راس سے ہے حائط مکافی ہوگا۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نظام کا معادل یکساں بوجھ وَ ہے۔

$$\text{تب} \qquad سے ع = \frac{وَ ل}{۸}$$

$$\text{یا} \qquad وَ = \frac{۸ \times سے ع}{ل}$$

اگر گرڈر کو دو مساوی بوجھ عبور کریں تو بالکل موجودہ صورت کا عمل کیا جائیگا۔ صرف ا = ب لیا جائیگا اور مکافی کے دونوں نصف حصے بالکل ایک دوسرے کے مشابہ ہونگے۔

$$\text{اِس صورت میں} \quad ف ہ = \frac{و}{۴ ل}\left(ل - \frac{ل}{۲}\right)^{۲}$$

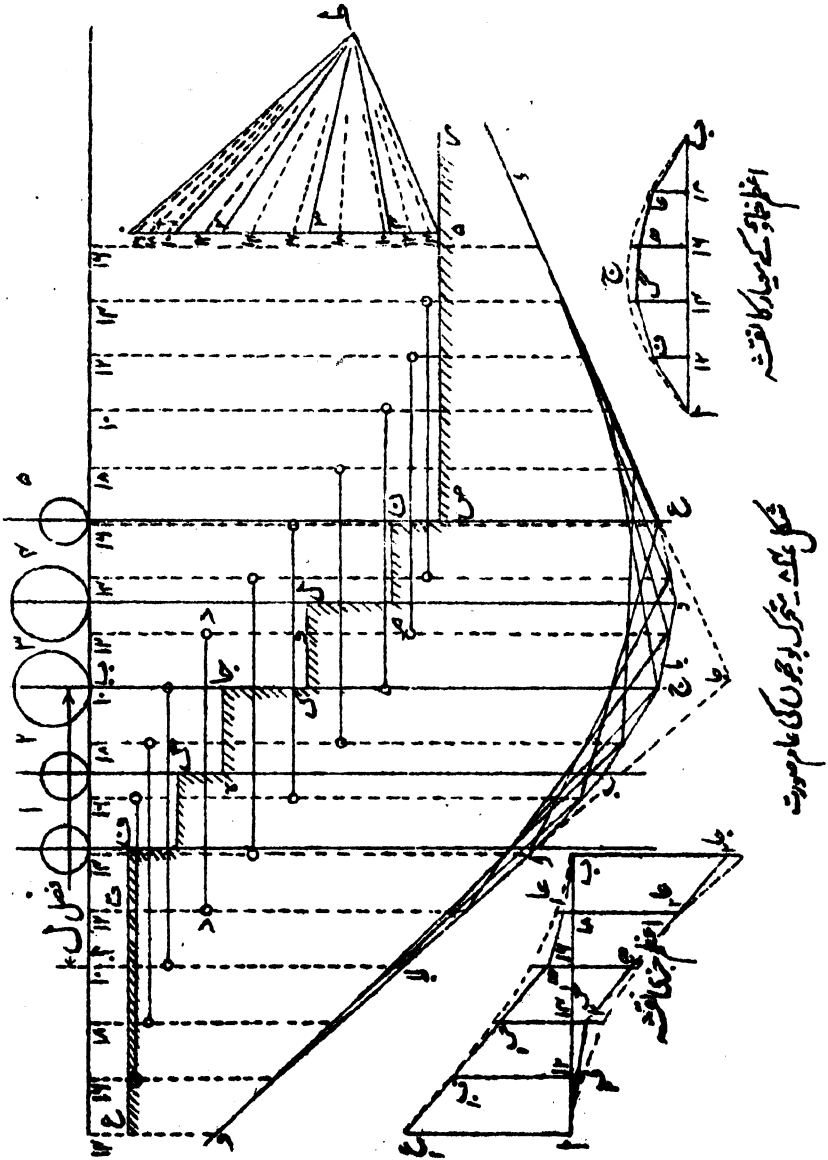
$$\therefore \quad سے ع = \frac{ہ ف \times \frac{ل}{۲}}{\left(\frac{ل}{۲} - \frac{ل}{۲}\right)} = \frac{ہ ف \times ل}{ل - \frac{ل}{۲}}$$

$$سے ع = \frac{و}{۴ ل} \cdot \frac{\left(ل - \frac{ل}{۲}\right)^{۲}}{ل - \frac{ل}{۲}} \times ل$$

$$وَ = \frac{۸ و}{۴ ل^{۲}} \cdot \frac{\left(ل - \frac{ل}{۲}\right)^{۲}}{\left(ل - \frac{ل}{۲}\right)} \times ل = \frac{۲ و}{ل}\left(ل - \frac{ل}{۲}\right)$$

(۵) متحرک بوجھوں کی عام صورتیں :۔ اگر منفرد بوجھوں کا ایک نظام مثلاً حراکوں کے دُھروں پر کے بوجھ ایک فصل پر سے گزریں تو نظام کی حرکت کے دوران میں فصل کے ہر نقطے پر کا جز اور خماؤ کا معیار بدلینگے اور ان کی اعظم قیمت معلوم کرنے کے لیے کوئی قاعدہ وضع کرنا ہوگا۔ ان میں سے ایک قاعدہ حسب ذیل ہے :۔ عملاً ریلوے کمپنیوں میں یہ دستور ہے کہ دُھرے پر کا معیاری بوجھ انتخاب کر لیتے ہیں اور یہ اُن کے حراکوں کی تجویز پر مبنی ہوتا ہے۔ اور اس میں وہ ۲ ½ تا ۱۰ فیصدی کے ممکن اضافے کی رعایت رکھتے ہیں۔ اس کے بعد اعظم جز اور خماؤ کے معیار کے منحنی ترسیمی طور پر کھینچے جاتے ہیں اور ان کے حائط مکافی کھینچ کر ان سے معادل یکساں بوجھ حاصل کیا جاتا ہے۔ نتائج کو ایک جدول یا ایک منحنی کی شکل میں لکھا جاتا ہے اور پلوں کو یکساں بوجھ کے لیے تجویز کیا جاتا ہے۔ جس کی حدت دیے ہوئے فصل کے لیے اس جدول یا منحنی سے حاصل کر لی جاتی ہے۔ گرڈروں کی تجویز والے باب (باب ۱۸) میں ہم چند اعداد و شمار اِن جدولوں کے متعلق دینگے۔

اس مسئلے میں نقشے بہت پیچیدہ ہوجاتے ہیں۔ اس لیے ہم اپنے نظام کو پانچ بوجھوں تک محدود رکھینگے یعنی (۱،۰) (۱،۲) (۲،۳) (۳،۴) اور (۴،۵) (شکل ۸۴ء)۔ لہٰذا اس سے زیادہ پیچیدہ ہو تو بھی عمل بالکل یہی رہیگا جو حسب ذیل ہے :۔ کاغذ کے بالائی کنارے کے قریب بوجھ کے نظام کو کھینچو اور پیمانہ ایسا اختیار کرو کہ بوجھ کے دونوں طرف کم از کم زیر بحث فصل کے مساوی فاصلہ رہے۔ اب بوجھوں کو ایک سمتی خط ۰، ۵ پر قائم کرو اور ایک موزوں قطب ط لے کر کڑیوں کا کثیر الاضلاع و ا ب ج د ع ی کھینچو۔ قطب ط کا بہترین انتخاب وہ ہوگا جس سے کڑیوں کے کثیر الاضلاع کا وسطی حصہ کاغذ کے نچلے کنارے تک پہنچے اور پہلی اور آخری کڑیاں و ا اور ع ی خارج ہو کر فصل کو کاغذ کے کناروں سے ذرا اندر ملیں۔ اب فرض کرو کہ زیر بحث فصل کا طول ل ہے اور فرض کرو کہ ا ب بوجھ کے نظام کی اضافت سے فصل کے

ایک محل کو تغیر کرتا ہے تب اگر ا اور ب میں سے انتصابی خطوط کھینچے جائیں

جو کڑیوں کے کثیر الاضلاع کو لا اور ما پر قطع کریں اور لا ما کو ملایا جائے تو لا د ب ما فصل پر بوجھ کے دیے ہوئے محل کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ ہوگا۔ اور اگر لا ما کے متوازی ط لا کھینچا جائے تو لا جز کے نقشے کا اساسی خط ہوگا۔ اب فصل کے متعدد نقاط پر خماؤ کے معیار اور جز ناپ لیے جاتے ہیں۔ پھر بوجھ کو فصل کی اضافت سے حرکت دی جاتی ہے، اور خماؤ کے معیار اور جز کے نئے نقشے کھینچے جاتے ہیں، اور دیے ہوئے نقاط پر قیمتیں ناپی جاتی ہیں اور اسی طرح۔ نقشہ کشی کے نقطۂ نظر سے بوجھ کو فصل کے اوپر حرکت دینے سے اس میں بہت زیادہ آسانی ہے کہ فصل کو بوجھ کے نیچے حرکت دی جائے کیونکہ اس صورت میں کڑیوں کے صرف ایک کثیر الاضلاع کا کھینچنا کافی ہے۔ اس طرح عمل حسب ذیل ہوگا:-

خماؤ کا معیار ــــ فصل کو چند مساوی حصّوں میں تقسیم کرو۔ عملاً ۱۰ حصے کافی ہونگے لیکن شکل کی پیچیدگی سے بچنے کے لیے ہم یہاں پانچ ہی حصّے کرینگے۔ پھر بڑے بوجھوں میں سے ایک سے شروع کرکے ان حصوں کے مساوی طول سارے کاغذ کے عرض پر لو اور ان نقاط میں سے انتصابی خطوط کھینچو۔ یہ انتصابی خطوط شکل میں نقطہ دار دکھائے گئے ہیں۔ اگر ان انتصابی خطوط پر اس طرح نمبر اندازی کی جائے جس طرح شکل میں کی گئی ہے تو ایک ہی نمبر کے قریب ترین انتصابی خطوط کو اُفقی خط سے ملانے سے فصل حاصل ہوگا۔ اب وہ گھیرنے والے خطوط کھینچ لیے جاتے ہیں جو بوجھ کے ہر محل کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ مہیا کرتے ہیں۔ اب ایک طول ا ب لو جو فصل ل کو تعبیر کرے اور اس کو اختیار کردہ تعداد میں تقسیم کرو۔ فصل کی ہر تراش پر اعظم خماؤ کا معیار کیا ہوتا ہے نقشے سے حاصل کرکے اس کو اس پیمانے پر جس کے حاصل کرنے کا طریقہ بتایا جاچکا ہے ا ب کے اوپر ترسیم کرو۔ مثلاً تراش ۱۲ کے لیے اعظم معین ۱۲ ف ہے، وغیرہ۔ اس طرح ا ف گ ہ ع ا ب اعظم خماؤ کے معیار کا منحنی ہے اور اگر یہ مطلوب ہو کہ نتائج کو ایک معادل یکساں بوجھ کی رقوم میں بیان کیا جائے تو اس منحنی کو

گھیرتا ہوا ایک مکافی ا ج ب کھینچا جاتا ہے۔ اس کا اعظم یعنی وسطی معین $\frac{\text{ب ل}^2}{۸}$ کو تعبیر کریگا، جہاں ب معادل یکساں بوجھ فی طولی فٹ ہے۔ اِس سے ب محسوب ہو سکتا ہے۔

اگر فصل کے حصوں کی تعداد بڑی لی جائے تو پھر اس میں کوئی مضایقہ نہیں کہ حصے شروع کہاں سے کیے جائیں۔

اگر کسی حصے کے کسی نقطے پر اعظم خماؤ کے معیار کی قیمت مطلوب ہو تو ذیل کے قاعدے کا استعمال کیا جائیگا:۔ اعظم خماؤ کا معیار بڑے بوجھوں میں سے ایک کے نیچے واقع ہوگا اور کسی بوجھ کے نیچے کا خماؤ کا معیار اُس وقت اعظم ہوگا جب کہ بوجھ کے نظام کا مرکزِ جاذبہ اور یہ بوجھ فصل کے مرکز سے مساوی فاصلے پر ہوں۔

اس کا ثبوت حسب ذیل ہے:۔ یہ تو ظاہر ہے کہ فصل کے کسی نقطے پر خماؤ کا معیار اُس وقت اعظم ہوگا جب کہ کوئی بوجھ ٹھیک اُس کے اوپر ہو۔ یہ ریسمانی کثیر الاضلاع کو دیکھنے سے ظاہر ہے۔ اب فرض کرو کہ بوجھ کے نظام کا مجموعی وزن د ہے اور فرض کرو کہ اس کا مرکزِ جاذبہ سرے ا سے فاصلہ لا پر ہے اور فرض کرو کہ زیرِ غور بوجھ و ہے اور مرکزِ جاذبہ سے فاصلہ ما پر ہے۔

تب بوجھ و کے نیچے خماؤ کا معیار

$$\text{م} = \text{ر}_۱ (\text{لا}+\text{ما}) - \text{و} \times \text{ما}$$

$$= \text{و} \frac{(\text{ل}-\text{لا})}{\text{ل}} (\text{لا}+\text{ما}) - \text{و ما} = \text{و} \left\{ \text{لا} - \frac{\text{لا}(\text{لا}+\text{ما})}{\text{ل}} \right\}$$

یہ اعظم ہوگا جب کہ $\frac{\text{ف م}}{\text{ف لا}} = ۰$

یعنی جب $۱ - \frac{۲\,\text{لا}}{\text{ل}} - \frac{\text{ما}}{\text{ل}} = ۰$

یا لا = (ل - ۱)/۲

یعنی جب کہ و اور د مرکز سے مساوی الفصل ہوں۔

بوجھ کے نظام کا مرکز جاذبہ نقطہ جا ہوگا جہاں کہ پہلی اور آخری کڑیاں ملتی ہیں۔ اِس طرح اعظم خماؤ کا معیار اس طرح معلوم ہوسکتا ہے کہ فصل کے مرکز کو جاکے اور بوجھوں ۲، ۳ اور ۳، ۴ کے درمیان رکھ کر دیکھیں کہ دونوں میں سے کس سے خماؤ کا معیار زیادہ حاصل ہوتا ہے۔

لیکن صرف یہ عمل کافی نہیں کیونکہ اگرچہ اس سے حقیقی اعظم خماؤ کا معیار ایک یا دو نقطوں پر معلوم ہوجاتا ہے لیکن فصل کے دوسرے نقطوں پر اعظم قیمت معلوم نہیں ہوتی۔

جز۔ اعظم جز کا منحنی کھینچنے کے لیے حسب سابق عمل کرو یعنی پہلے بوجھ قائم کرو اور کڑیوں کا کثیر الاضلاع کھینچو۔ پھر سمتی کثیر الاضلاع پر کے نقاط کو اُن کے متناظر حصوں میں خارج کرکے (یعنی ان نقاط میں سے گزرنے والے اُفقی خطوط متناظر حصوں میں کھینچ کر) زینہ دار جزی منحنی ع ف گ ہ جا ک ل م ن ص س کھینچ لو جیسا کہ شکل ۸۴ میں دکھایا گیا ہے۔ اس کو خماؤ کے معیار والے کاغذ پر کھینچ سکتے ہیں یا چاہیں تو علیحدہ کاغذ پر بھی کھینچ سکتے ہیں۔ فصل کے حصوں میں سے جو نقطہ دار انتصابی خطوط کھینچے گئے ہیں اُن سے مختلف محلوں کے لیے خماؤ کے معیار کے نقشوں کے گھیرنے والے اضلاع کا تعین ہوگا۔ اب اِن گھیرنے والے خطوط میں سے ہر ایک کے متوازی ط میں سے خطوط کھینچو۔ یہ ط ۱۰، ط ۱۲، ط ۱۴، وغیرہ، ہیں اور اُفقطہ دار کھینچے گئے ہیں۔ اس طرح جو نقطے ۱۰، ۱۲، ۱۴، وغیرہ، ہونگے وہ جز کے لیے اساسی خطوط کا کام دینگے۔ اگر بوجھ فصل سے بہت بڑا ہو تو اتنا کافی ہے کہ یہ خطوط اس نقطے سے کھینچے جائیں جہاں پہلا بوجھ فصل پر آتا ہے، اور اُس نقطے تک کھینچے جائیں جہاں پہلا بڑا بوجھ فصل سے گزر چکا ہو۔ اور نیز منفی جز حاصل کرنے کے لیے اِس نقطے سے جہاں کہ آخری بڑا بوجھ فصل پر آتا ہے اُس نقطے تک عمل کیا جائے جہاں آخری بوجھ فصل سے گزر چکے۔ اب اِن نقاط ۱۰، ۱۲،

وغیرہ سے ان کے متناظر حصوں میں افقی خطوط کھینچو اور جز کے نقشے وہ ہونگے جو ان اساسی خطوط اور زینہ دار جزی منحنی کے درمیان حاصل ہوں۔

مثلاً اساسی خط د د لو۔ تب بوجھ کے اس محل کے لیے جز کا نقشہ د ت ف گ ہ جا ک و د ہوگا۔

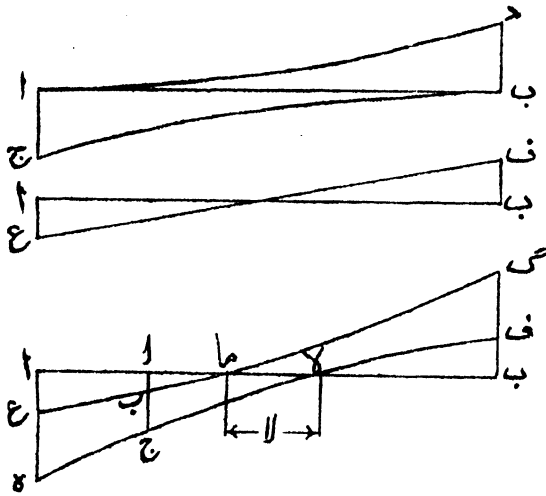
اب فصل کے مختلف حصوں پر کے اعظم مثبت اور منفی جز ناپ کر ایک اساس ا ب پر ترسیم کرو۔ اور نقاط ع ف، وغیرہ اور ف گ، وغیرہ، کو ملا کر اعظم جز کے منحنی حاصل کرو۔ اور اگر معادل یکساں بوجھ مطلوب ہو تو ان کو گھیرتا ہوا ایک امکانی کھینچو جو نقطہ دار دکھایا گیا ہے۔

نقشہ کشی کے متعلق نوٹ ——— عملاً بہترین طریقہ یہ ہوگا کہ کڑیوں کا کثیر الاضلاع احتیاط کے ساتھ ایک بڑے کاغذ پر اُتارا جائے اور فصل کے حصوں کو تعبیر کرنے والے انتصابی خطوط ایک چربہ کاغذ پر اُتارے جائیں۔ اب خماؤ کے معیار اور جز کے مختلف نقشوں کا چربہ اُتارا جا سکتا ہے اور بہت سی صورتوں میں ان کو فی الحقیقت کھینچنے کی ضرورت نہیں۔ اور ہر نقطے پر کی اعظم قیمت کو ناپ کر اعظم جز اور خماؤ کے معیار کے منحنیوں میں ترسیم کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح کڑیوں کا ایک کثیر الاضلاع متعدد فصلوں کے لیے کار آمد ہو سکتا ہے۔

دیکھو اگر پانچ کی بجائے جیسا کہ شکل میں کیا گیا ہے دس حصے لیے جائیں تو اعظم جز اور خماؤ کے معیار کے نقشوں کی شکل بدل جائیگی۔

اِن عملوں اور ساختوں کے متعلق تفصیلی معلومات کے لیے طالب علم مسٹر ایچ۔ بمفورڈ ایم۔ ایس سی کے اُن چند مضامین کا مطالعہ کریں جو رسالہ "انجینیرنگ" کی جلد ۸۲ (۱۹۰۶ء) میں ہیں اور ایک مضمون جو کہ ہم ایم۔ آئی۔ سی۔ ای کا انسٹی ٹیوٹ آف سول انجینیرز کی روداد جلد ۱۵۰ میں ہے۔

(۶) متحرک بوجھ اور مردہ بوجھ کے متحدہ نقشے ——— عملاً متحرک بوجھوں کے ساتھ ساتھ ہمیشہ تعمیر کے وزن کا مردہ بوجھ بھی موجود ہوتا ہے

جس کو متحرک بوجھ کے ساتھ مرکب کر کے حاصل زور معلوم کیے جاتے ہیں۔
مردہ بوجھ کی اہمیت بمقابلہ متحرک بوجھ کے، فصل کے بڑھنے سے بڑھتی ہے اور فصل بہت بڑا ہو تو مُردہ بوجھ سے پیدا ہونے والے زور عموماً متحرک بوجھ کے زوروں سے زیادہ ہوتے ہیں۔
ہم اس صورت پر غور کرینگے کہ گرڈر کا فصل ل ہے اور اس پر ب ٹن فی طولی فٹ کا ایک یکساں متحرک بوجھ گرڈر سے بڑا آتا ہے اور گرڈر پر ایک یکساں بوجھ د ہے۔

شکل ۸۵۔ متحرک بوجھ اور مردہ بوجھ ملے ہوئے

جز کے نقشے ـــــ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں متحرک بوجھ کے تحت اعظم جز کا نقشہ دو مکافیوں ج ب اور ا د (شکل ۸۵) سے حاصل ہوگا۔
مُردہ بوجھ کے لیے نقشہ، ترچھا خط ع ف ہوگا۔
ان کو ترکیب دینے سے منحنی گ ما ع اور ف لا ہ حاصل ہوتے ہیں جن میں سے ع ا اور ب ف دونوں $\frac{د}{۲}$ کے مساوی ہیں، اور ہ ا اور گ ب دونوں $\frac{د}{۲} + \frac{ب ل}{۲}$ کے مساوی ہیں۔

اگر فصل پر ما اور ا کے درمیان ایک نقطہ ل پر غور کیا جائے تو ل پر جب ہمیشہ منفی ہوگا، اقل قیمت ل ب ہوگی اور اعظم قیمت ل ج۔

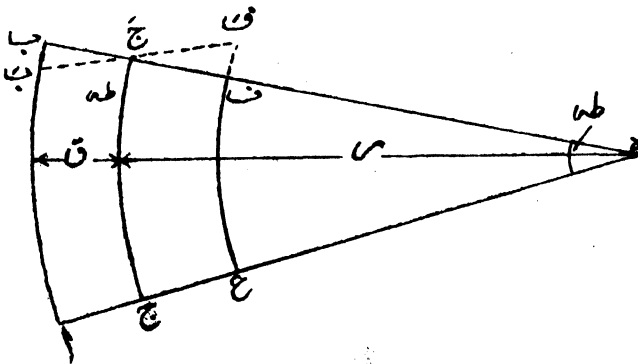
نقاط لا اور ما کے درمیان بوجھ کے عبور کے دوران میں جزکی علامت بدلتی ہے اور بعض مصنفوں نے لا ما = لا کو گرڈر کے ماسکی طول سے موسوم کیا ہے۔ اگر گرڈر ایک ڈھانچہ ہو تو وتری ارکان میں زور کے تعاکس کو روکنے کے لیے لا اور ما کے درمیان پس رباطی (Counter bracing) کی ضرورت ہوگی۔

ڈھانچہ دار گرڈروں کی صورت میں متحرک بوجھوں کے اعظم جز کے نقشے معمولی شہتیر سے جس پر ہم نے غور کیا ہے کسی قدر مختلف ہوتے ہیں اور ہم اس مسئلے سے ڈھانچہ دار تیروں کے باب میں بحث کرینگے۔ اور باب ۱۸ میں بھی ہم گرڈروں کی تجویز میں متحرک بوجھ کے نقشوں کے استعمال سے مزید بحث کرینگے۔

آٹھواں باب

شہتیروں کے انصراف

ہم وہ ربط معلوم کر چکے ہیں جو شہتیر کے زوروں اور خماؤ کے معیار کے درمیان پایا جاتا ہے۔ اب ہم انصرافوں اور خماؤ کے معیار کا ربط معلوم کرنا چاہتے ہیں۔

فرض کرو کہ ج جَ (شکل ۸۶) ایک شہتیر کے مرکزی خط کے ایک چھوٹے طول کو تعبیر کرتا ہے جس کا ابتدائی انحنا صفر تھا اور جو اب نصف قطر انحنا ر کے منحنی کی شکل میں مڑ گیا ہے، یہ نصف قطر ر صرف اُس چھوٹے طول ج جَ کا ہے

شکل ۸۶

نہ کہ سارے شہتیر کا۔ اگر وہ مفروضات جو اس سے پہلے شہتیروں کے زوروں کے متعلق اختیار کیے گئے یہاں بھی صحیح ہوں تو ب ف اور ا ع خماؤ کے بعد بھی خطِ مستقیم ہونگے اور ج جَ کے مرکزِ انحنا ہ پر ملینگے۔ ا ع کے متوازی بَ فَ کھینچو۔ اب قطاع ب بَ ج اور ج جَ ہ پر غور کرو۔

چونکہ طا بہت چھوٹا ہے اس لیے $\frac{\text{ب بَ}}{\text{بَ جَ}} = \frac{\text{ج جَ}}{\text{ج ہ}}$

یا $\frac{\text{ب بَ}}{\text{ج جَ}} = \frac{\text{بَ جَ}}{\text{ج ہ}} = \frac{\text{ق}}{\text{ر}}$ ......(۱)

لیکن ا بَ خماؤ سے پہلے کا طول ہے اس لیے

$\frac{\text{ب بَ}}{\text{ا بَ}} = \frac{\text{طول کا اضافہ}}{\text{ابتدائی طول}} = \text{ا ب کا فساد}$

لیکن ا بَ = ج جَ

$\therefore \frac{\text{ب بَ}}{\text{ج جَ}} = \text{ا ب کا فساد} = \frac{\text{ز}}{\text{ے}}$ جہاں ز کنارے ا ب میں کا زور ہے۔

$\therefore$ اس کو مساوات (۱) میں درج کرنے سے :-

$\frac{\text{ز}}{\text{ے}} = \frac{\text{ق}}{\text{ر}}$

یا $\frac{\text{ز}}{\text{ق}} = \frac{\text{ے}}{\text{ر}}$ ....(۲)

لیکن ہم پہلے دیکھ چکے ہیں کہ

$\text{م} = \frac{\text{ز آ}}{\text{ق}}$

یا $\frac{\text{ز}}{\text{ق}} = \frac{\text{م}}{\text{آ}}$

∴ ان نتائج کو اکٹھا کرنے سے

$$\frac{\text{ز}}{\text{ق}} = \frac{\text{م}}{\text{آ}} = \frac{\text{ہے}}{\text{ر}} \qquad \text{(۳)}$$

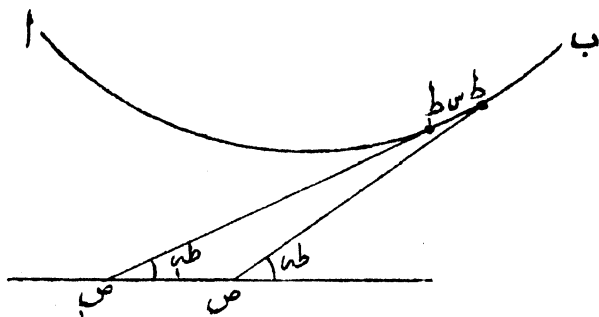
یہ شہتیروں کے زوروں، خماؤ کے معیار، اور نصف قطرِ انحنا کا مکمل ربط ہے۔
عملاً شہتیر کے مختلف نقاط پر نصف قطرِ انحنا معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی بلکہ انصراف مطلوب ہوتا ہے اس لیے ہم اب نصف قطرِ انحنا اور انصراف کا ربط معلوم کرینگے اور اس کے بعد مختلف قسم کے لداؤں کے لیے انصراف معلوم کرینگے۔
یہ بحث دو حصوں میں بٹ جاتی ہے ایک ترسیمی دوسرا ریاضیاتی یا تحلیلی۔ اور ہم ان سے اسی ترتیب میں بحث کرینگے۔
(یہ دونوں بحثیں بجائے خود مکمل ہیں اور طالب علم ان میں سے کسی ایک کو اختیار کر سکتے ہیں)۔

ترسیمی نقطۂ نظر سے بحث

انحنا پر ابتدائی نوٹ —— فرض کرو کہ ا ب (شکل ۸۶ ل) کوئی منحنی ہے اور اس پر دو نقطے ط، ط۱ باہمی فاصلہ س پر ہیں۔ مماس ط ص اور ط۱ ص۱ کھینچو جو کسی اساسی خط کو ملیں اور اس سے زاویے طہ اور طہ۱ بنائیں۔ اور ان مماسوں کے عماد کھینچو۔ ان عمادوں کا نقطۂ تقاطع چھوٹی توس ط ط۱ کا مرکزِ انحنا ہوگا۔
اور مرکز پر ط ط۱ کے محاذی زاویہ (طہ۔طہ۱) بنیگا۔
∴ اگر نصف قطرِ انحنا ر ہو تو $\text{ر} \times (\text{طہ} - \text{طہ}_1) = \text{س}$

یا $\text{ر} = \dfrac{\text{س}}{\text{طہ} - \text{طہ}_1}$

یا $\dfrac{\text{طہ} - \text{طہ}_1}{\text{س}} = \dfrac{1}{\text{ر}}$

اِس $\frac{1}{r}$ کو دیے ہوئے نقطہ پر کا انحنا کہا جاتا ہے اور انحنا وہ قیمت ہے جو س کے بے انتہا چھوٹے ہونے پر $\frac{ط_1 - ط}{س}$ اختیار کرتا ہے۔

شکل ۸۶ ا

مور کا مسئلہ — اب فرض کرو کہ ا ب ایک طناب ہے جو ایک انتصابی مستوی میں کسی طرح لادی گئی ہے۔ اور

فرض کرو کہ نقاط ط، ط کے درمیان بوجھ و ہے۔ تب ترسیمی سکونیات کے قوانین سے یہ لازم آتا ہے کہ طناب اُس کڑیوں کے کثیرالاضلاع کی شکل میں ہوگی جو اس پر کے بوجھ کے نظام کے لیے ایسے قطبی فاصلے کے ساتھ کھینچا جائے جو طناب کے افقی تناؤ کے مساوی ہے (دیکھو صفحہ ۲۵۷)۔ (ا

اب فرض کرو کہ طناب میں تناؤ نقاط ط، ط پر ت، ت ہیں۔ تب چونکہ طناب پر کوئی افقی قوت نہیں اس لیے ان تناؤں کے افقی اجزائے تحلیلی مساوی ہونے چاہییں۔ فرض کرو کہ یہ اُفقی جزوِ تحلیلی ف ہے۔ اور تناؤں کے انتصابی اجزائے تحلیلی کا فرق اُن نقاط کے درمیان کے بوجھ و کے مساوی ہونا چاہیے۔

اس لیے $\text{ف} = \text{ت جم طہ} = \text{ت}_1 \text{ جم طہ}_1$

$\text{و} = \text{ت جب طہ} - \text{ت}_1 \text{ جب طہ}_1$

یعنی $\text{و} = \frac{\text{ف جب طہ}}{\text{جم طہ}} - \frac{\text{ف جب طہ}_1}{\text{جم طہ}_1}$

$= \text{ف} (\text{مس طہ} - \text{مس طہ}_1)$

اب اگر طہ_1 اور طہ چھوٹے ہوں جیسا کہ شہتیروں کی صورت میں ہو گا تو ہم $\text{مس طہ}_1 = \text{طہ}_1$ اور $\text{مس طہ} = \text{طہ}$ لے سکتے ہیں۔

اِس طرح $\text{و} = \text{ف} (\text{طہ} - \text{طہ}_1)$

$\therefore \frac{\text{و}}{\text{س}} = \frac{\text{ف} (\text{طہ} - \text{طہ}_1)}{\text{س}}$

$= \frac{\text{ف}}{\text{ر}}$

لیکن $\frac{\text{و}}{\text{س}} =$ بوجھ طناب کے فی اکائی طول = ب فرض کرو

$\therefore \text{ب} = \frac{\text{ف}}{\text{ر}}$

یا $\frac{1}{\text{ر}} = \frac{\text{ب}}{\text{ف}}$ .... (۴)

اب شہتیر کے مسئلہ پر واپس آؤ۔

مساوات (۳) سے $\frac{1}{\text{ر}} = \frac{\text{م}}{\text{آ ے}}$ .... (۵)

مقدار آ × ے محض شہتیر کی شکل اور مادے پر منحصر ہے، اور اس کو خماؤ کی استواری کہا جاتا ہے۔ تب اگر یہ خماؤ کی استواری سارے فصل میں یکساں ہو تو بیان ۲ اور مساواتوں (۴) اور (۵) کا مقابلہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ: ایک لدا ہوا شہتیر وہی شکل اختیار کر لیتا جو اسی فصل کی ایک طناب جس پر لداؤ شہتیر کے خماؤ کے معیار کے منحنی کے مطابق ہو اور جس کا افقی تناؤ شہتیر کے خماؤ کی استواری (آ×ے)

مساوی ہو۔

یہ **مور (Mohr) کا مسئلہ** ہے اور شہتیر کی انصرافی شکل شہتیر کا لچک کا خط کہلاتی ہے۔ اِس طرح دیکھو شہتیر کا لچک کا خط حاصل کرنے کے لیے حسب ذیل عمل کرنا ہوگا:۔

(۱) شہتیر کے خماؤ کے معیار کا منحنی کھینچو۔

(۲) اس منحنی کو پتلی انتصابی پٹیوں میں تقسیم کرو، اور ان پٹیوں کے وسطی معینوں کو ایک سمتی خط پر قایم کرو اور ایک قطبی فاصلہ خماؤ کی استواری (آ × م) کے مساوی لو۔

(۳) اس سمتی کثیرالاضلاع کے لیے کڑیوں کا کثیرالاضلاع کھینچو اور اس کو ایک افقی اساس پر تحویل کرو تب یہ کڑیوں کا کثیرالاضلاع لچک کے خط کو ایک خاص پیمانے پر تعبیر کریگا جس کو ہم آگے چل کر معلوم کرینگے۔

فی الحال ہم فرض کرینگے کہ شہتیر کی تراش سارے طول میں یکساں ہے یا یہ کہ خماؤ کی استواری مستقل ہے۔ ایسا نہ ہونے کی صورت میں کیا عمل کیا جاتا ہے یہ ہم آگے چل کر بتائینگے۔

انصرافوں کی معیاری صورتیں

بعض خاص صورتوں میں اعظم انصراف مور (Mohr) کے مسئلہ سے استدلال کرکے معلوم کیے جاسکتے ہیں۔ اور ان صورتوں سے اب بحث کی جائیگی (شکل ۸۷)۔

(۱) سادہ سہارے ہوئے شہتیر پر مرکزی بوجھ و۔ فرض کرو کہ ا ب ایک سادہ سہارا ہوا شہتیر ہے جس کا فصل ل ہے اور جس پر ایک مرکزی بوجھ و ہے۔

تب ا د ب خماؤ کے معیار کا نقشہ ہوگا جس کا اعظم معین $\frac{و ل}{۴}$ ہوگا۔ فرض کرو کہ ا ج ب شہتیر کا لچک کا خط ہے۔ تب، مور (Mohr) کے مسئلہ کی رُو سے، اس لچک کے خط کی شکل وہی ہوگی جو اسی فصل کی ایک خیالی طناب کی ہوتی جس پر بوجھ خماؤ کے معیار کے منحنی کے مطابق ہو اور

افقی تناؤ خماؤ کی استواری کے مساوی ہو۔

اب اس طناب کے نصف کی قائمیت پر غور کرو۔ یہ تین قوتوں کے تحت تعادل میں ہے۔ افقی کھینچ ف جو نقطہ ج پر عمل کرتی ہے، نصف طناب پر کا حاصل بوجھ ب، اور نقطہ ا پر کا تناؤ ت۔

ا کے گرد معیار لو تو

$$\text{ف} \times \text{صہ} = \text{ب} \times \text{ما}$$

$$\therefore \quad \text{صہ} = \frac{\text{ب} \times \text{ما}}{\text{ف}}$$

موجودہ صورت میں ب = خماؤ کے معیار کے نقشے کے نصف کا رقبہ

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{\text{ل}}{۲} \times \frac{\text{و ل}}{۴} = \frac{\text{و ل}^{۲}}{۱۶}$$

ما = سایہ دار مثلث کے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ ا سے

$$= \frac{\text{ل}}{۳}$$

$$\text{ف} = \text{آسے}$$

$$\therefore \quad \text{صہ} = \frac{\text{و ل}^{۲}}{۱۶} \times \frac{\text{ل}}{۳\ \text{آسے}} = \frac{\text{و ل}^{۳}}{۴۸\ \text{آسے}}$$

(۲) سادہ سہارے ہوئے شہتیر پر یکساں بوجھ —— فرض کرو کہ ا ب ایک سادہ سہارا ہوا شہتیر ہے جس کا فصل ل ہے اور جس پر ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ و ہے۔

خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مکافی ہوگا جس کا ارتفاع $\frac{\text{و ل}}{۸}$ ہوگا۔
تب خیالی طناب کے نصف کی قائمیت پر غور کرنے سے حسب سابق

$$\text{صہ} = \frac{\text{ب} \times \text{ما}}{\text{ف}}$$

موجودہ صورت میں ب = خماؤ کے معیار کے نقشے کے نصف کا رقبہ

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} ل \times \frac{و ل}{۸} = \frac{و ل^۲}{۲۴}$$

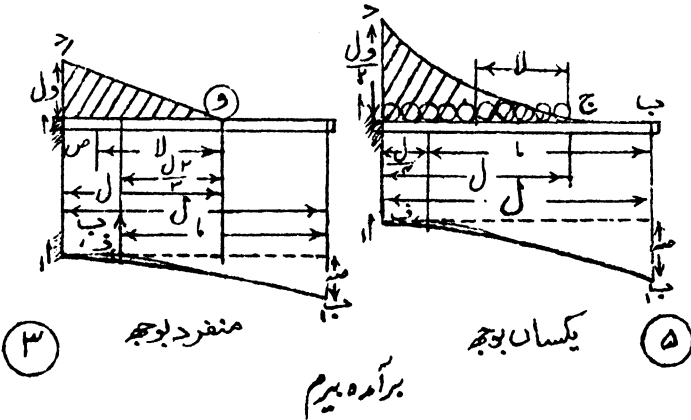
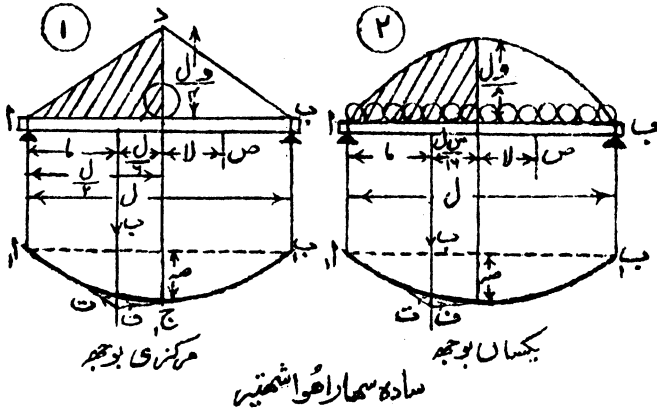
$$ا = \frac{۵}{۱۶} ل$$

$$ف = آ ے$$

$$\therefore \quad صہ = \frac{و ل^۲}{۲۴} \times \frac{۵ ل}{۱۶ \, آ ے} = \frac{۵ و ل^۳}{۳۸۴ \, آ ے}$$

سادہ سہارا ہوا شہتیر

برآمدہ بیرم

شکل ۸۵۔ شہتیروں کے انحراف

(۳) برآمدہ بیرام پر ایک منفرد بوجھ کسی نقطے پر ـــــ

فرض کرو کہ ایک برآمدہ بیرم کا فصل ل ہے اور اس پر ثابت سرے ا سے فاصلہ ل پر ایک بوجھ و ہے۔

تب خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مثلث ہوگا جس میں ا د = و ل ۔ اور ا ب شہتیر کے لچک کے خط اور خیالی طناب کو تعبیر کرتا ہے۔ اس صورت میں ہم کو یہ تصور کرنا ہوگا کہ بوجھ اوپر کو عمل کرتا ہے۔

رسی ا ا پر افقی ہے۔

ب کے گرد معیار لو۔ تب حسب سابق

$$\text{ف} \times \text{صہ} = \text{ب} \times \text{ما}$$

$$\text{یا} \quad \text{صہ} = \frac{\text{ب} \times \text{ما}}{\text{ف}}$$

موجودہ صورت میں ب = خماؤ کے معیار کے نقشے ا ج د کا رقبہ

$$= \frac{\text{و ل} \times \text{ل}}{۲} = \frac{\text{و ل}^{۲}}{۲}$$

$$\text{ما} = \text{ل} - \frac{\text{ل}}{۳}$$

$$\text{ف} = \text{آ ے}$$

$$\therefore \quad \text{صہ} = \frac{\text{و ل}^{۲}}{۲\,\text{آ ے}} \left(\text{ل} - \frac{\text{ل}}{۳}\right)$$

دیکھو اس صورت میں شہتیر کا حصہ ج ب مستقیم ہوگا۔

(۴) برآمدہ بیرام پر منفرد بوجھ آزاد سرے پر

یہ گزشتہ صورت کی خاص شکل ہے جس میں ل = ل

$$\therefore \quad \text{صہ} = \frac{\text{و ل}^{۲}}{۲\,\text{آ ے}} \left(\text{ل} - \frac{\text{ل}}{۳}\right)$$

$$= \frac{\text{و ل}^{۳}}{۳\,\text{آ ے}}$$

(۵) برآمدہ بیرام پر یکساں بوجھ ثابت سرے سے کسی نقطے تک — فرض کرو کہ اب ایک برآمدہ بیرم ہے جس کا فصل ل ہے، جس پر ایک بوجھ و ثابت سرے ا سے نقطہ ج تک یعنی طول ل پر یکساں پھیلا ہوا ہے۔

تب حسب سابق:

$$ص = \frac{ب\,ما}{ف}$$

موجودہ صورت میں ب = خمائو کے معیار کے منحنی اجد کا رقبہ

$$= \frac{1}{3} \times \frac{و\,ل}{2} \times ل = \frac{و\,ل^2}{6}$$

$$ما = ل - \frac{ل}{4}$$

$$ف = آ ے$$

$$\therefore\ ص = \frac{و\,ل^2}{6\,آ\,ے}\left(ل - \frac{ل}{4}\right)$$

(۶) برآمدہ بیرام پر یکساں بوجھ سارے طول پر —

یہ گزشتہ صورت کی ایک خاص شکل ہے جس میں ل = ل

$$\therefore\ ص = \frac{و\,ل^2}{6\,آ\,ے}\left(ل - \frac{ل}{4}\right)$$

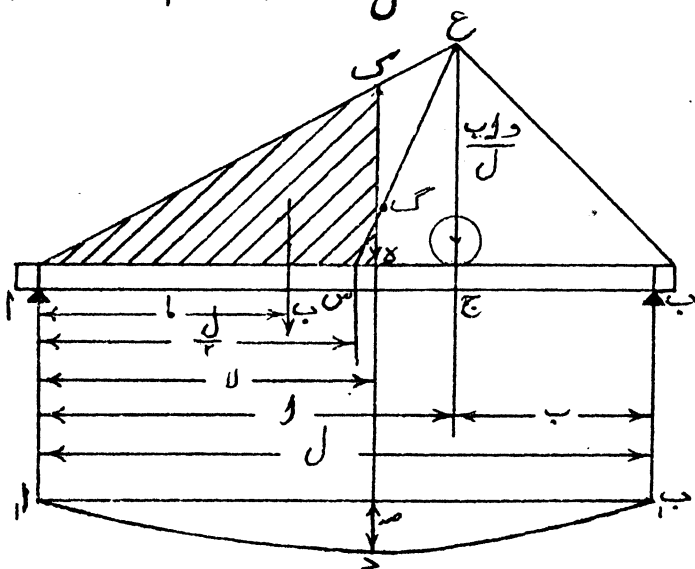
$$= \frac{و\,ل^2}{6\,آ\,ے} \times \frac{3\,ل}{4} = \frac{و\,ل^3}{8\,آ\,ے}$$

(۷) سادہ سہارے ہوئے شہتیر پر منفرد بوجھ کسی مقام پر — اس صورت میں استدلال کسی قدر طویل ہے لیکن اس کے علاوہ اور کوئی مشکل نہیں۔

پہلا اہم نکتہ یہ ہے کہ اعظم انصراف بوجھ کے نیچے واقع نہیں ہوگا۔ اور چونکہ تقریباً ہمیشہ اعظم انصراف ہی کی ضرورت ہوتی ہے اس لیے عین بوجھ کے نیچے کا انصراف معلوم کرنا تقریباً بے کار ہے۔ اگرچہ کہ اکثر معلوم کیا جاتا ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی شہتیر کے خماؤ کے معیار کے منحنی یا کڑیوں کے کثیر الاضلاع کا معین اعظم اس مقام پر ہوتا ہے جہاں جز صفر ہو۔ اس لیے اگر خماؤ کے معیار کے منحنی کو لداؤ کا منحنی مانا جائے تو اعظم انصراف اس مقام پر ہوگا جہاں اس لداؤ کی وجہ سے جز صفر ہو۔

فرض کرو کہ فصل ل کے ایک شہتیر ا ب پر ایک نقطہ ج پر جس کے فاصلے ا اور ب سے ا اور ب ہیں ایک بوجھ د رکھا گیا ہے (شکل ۸۸)۔ تب ا ع ب خماؤ کے معیار کا نقشہ ہوگا جس میں ج ع = $\frac{د ا ب}{ل}$ ۔ اس خماؤ کے معیار کے نقشے کو بوجھ کا نقشہ تصور کریں تو اس سے تعبیر ہونے والا مجموعی بوجھ =

$$\triangle \text{ا ع ب کا رقبہ} = \frac{د ا ب}{ل} \times \frac{ل}{۲} = \frac{د ا ب}{۲}$$

شکل ۸۸

اور یہ مثلث کے مرکزِ ہندسی گ پر عمل کریگا۔
اس نقطہ گ میں کا انتصابی خط ج سے فاصلہ $\frac{۲}{۳}$ س ج پر ہوگا جہاں س شہتیر کا وسطی نقطہ ہے۔ اِس طرح اِس مرکزِ ہندسی کا فاصلہ ب سے

$$= \text{ب} + \frac{۲}{۳}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{ب}\right) = \frac{\text{ل}}{۳} + \frac{\text{ب}}{۳} = \frac{\text{ل}+\text{ب}}{۳}$$

اس لیے اِس خیالی بوجھ کی وجہ سے ا پر کا ردِّ عمل

$$= \frac{\text{مجموعی بوجھ}}{\text{ل}} \times \frac{(\text{ل}+\text{ب})}{۳} = \frac{\text{و ا ب}}{۲\text{ل}} \times \frac{\text{ل}+\text{ب}}{۳}$$

اب فرض کرو کہ انحراف ا سے فاصلہ لا پر نقطہ د پر اعظم ہوتا ہے۔
تب اِس نقطے پر جز صفر ہوگا۔

یعنی $\text{ر}_{\text{ا}} - \frac{\text{لا}}{۲} \times \text{ک ہ} = ۰$

یا $\frac{\text{و ا ب}}{۲\text{ل}}\left(\frac{\text{ل}+\text{ب}}{۳}\right) - \frac{\text{لا}}{۲} \times \frac{\text{و ب لا}}{\text{ل}} = ۰$

یا $\frac{\text{ا}(\text{ل}+\text{ب})}{۳} = \text{لا}^۲$

یعنی $\text{لا} = \sqrt{\frac{\text{ا}(\text{ل}+\text{ب})}{۳}}$

اب اعظم انحراف مہ اِس طرح حاصل ہوگا کہ خیالی طناب کے حصہ ا د کی قائمیت پر غور کریں۔

حسب سابق $\text{مہ} = \frac{\text{جب} \times \text{ما}}{\text{ف}}$

موجودہ صورت میں جب = رقبہ ا ک ہ

$$= \frac{\text{و ب لا}}{\text{ل}} \times \frac{\text{لا}}{۲} = \frac{\text{و ب لا}^۲}{۲\text{ل}}$$

= و ب ا (ل + ب) / ۶ ل = و ا ب (ل + ب) / ۶ ل

م = ۲/۳ لا

= ۲/۳ م √(ا (ل + ب) / ۳)

ف = آ ے

∴ ص = و ا ب (ل + ب) / ۶ ل × ۲/۳ م √(ا (ل + ب) / ۳) × ۱ / آ ے

= و ب / ۳ آ ے ل {ا (ل + ب) / ۳}^(۳/۲)

استعمال کی غرض سے اس کو کسی قدر سادہ شکل میں یوں رکھ سکتے ہیں:

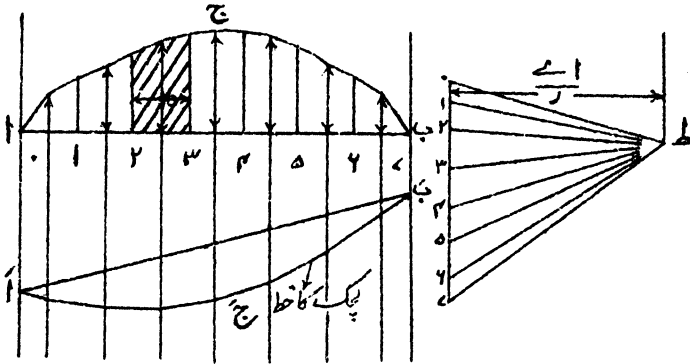
رکھو ا = عہ ل، تب ب = (۱ - عہ) ل

اور ص = و (۱ - عہ) / ۳ آ ے {عہ ل (۲ - عہ) ل / ۳}^(۳/۲)

= و ل^۳ / ۳ آ ے (۱ - عہ) {(۲ عہ - عہ^۲) / ۳}^(۳/۲)

شہتیروں کے انحرافوں کے متعلق مور کے مسئلے کے مزید استعمالات کے لیے دیکھو ضمیمہ صفحہ ( )۔

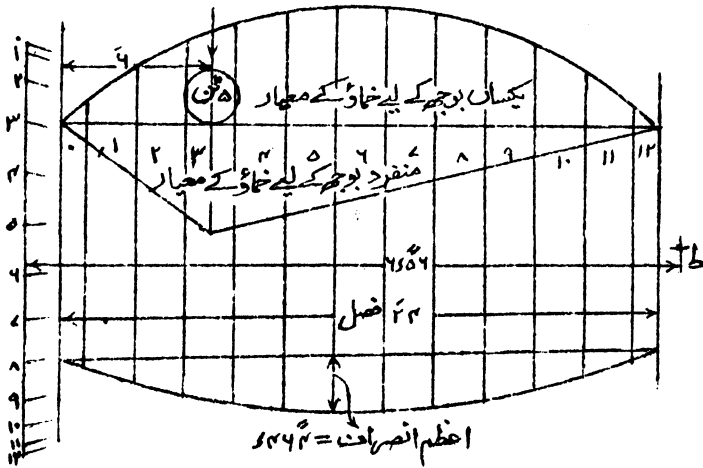
ترسیمی عمل کسی لداؤ کے لیے ــــــ فرض کرو کہ کسی دیے ہوئے بوجھ کے نظام کے لیے خاؤ کے معیار کا منحنی ا ج ب ہے۔ قاعدے کو چند مساوی حصوں میں تقسیم کرو۔ اور فرض کرو کہ ہر ایک حصے کا طول ع ہے۔

حصوں کی تعداد اتنی ہو کہ خماؤ کے معیار کے نقشے کا ہر ایک حصہ تقریباً ایک مستطیل ہو۔ اب ہر ایک حصے کے وسطی معینوں کو نسبت ۱/ن میں گھٹا کر ایک سمتی خط پر قائم کرو۔ یہ معین اس لیے گھٹائے گئے ہیں کہ سمتی نقشہ ایک معقول جسامت کا رہے بہت بڑا نہ ہو جائے۔

شکل ۸۹۔ انصرافوں کے لیے ترسیمی عمل

اب فرض کرو کہ فصل کا پیمانہ اً = لا فٹ ہے، اور خماؤ کے معیار کا پیمانہ اً = ما فٹ ٹن ہے۔ تب اگر خماؤ کے معیار کے نقشے کے کسی حصے مثلاً ۲، ۳ پر غور کریں تو اس حصے کا رقبہ ع × وسطی معین ہوگا۔ اس طرح چونکہ کسی دیے ہوئے پیمانہ پر ہر حصے کا رقبہ اس کے وسطی معین کے متناسب ہوگا اس لیے وسطی معین کا ایک انچ ع × لا × ما مربع فٹ × ٹن کو تعبیر کریگا۔ اور چونکہ سمتی خط کا ہر ایک حصہ معینوں کا ۱/ن ہے اس لیے سمتی خط کا حصہ ۲، ۳ خماؤ کے معیار کے نقشے کے متناظر حصے کو پیمانہ اً = ن × ع × لا × ما مربع فٹ × ٹن کو تعبیر کریگا۔ اب اس پیمانے پر آسے کا طول محسوب کرو۔ یہ طول بہت بڑا ہوگا اور عملی استعمال کے لیے ناموزوں ہوگا اس لیے قطب ط فاصلہ آسے/ر پر لو جہاں ر ایک موزوں عدد صحیح ہے۔ اس قطب ط کو لے کر رسیائی کثیر الاضلاع اَ جَ بَ کھینچو۔ تب یہ اس دیے ہوئے لداؤ کے لیے شہتیر کا لچک کا خط ہوگا، یا زیادہ صحیح

یہ کہنا ہوگا کہ آ ج ب کو ایک اُفقی قاعدے پر تحویل کیا جائے تو لچک کا خط حاصل ہوگا۔ انصرافوں کا پیمانہ یوں حاصل ہوگا:۔

اگر قطبی فاصلہ آ سے کے مساوی لیا جاتا تو انصراف فصل کے پیمانے اَ = لا فٹ پر ہوتے لیکن چونکہ قطبی فاصلہ آ سے/ر ہے اس لیے انصرافوں کا پیمانہ اَ = لا/ر فٹ ہوگا۔ ذیل کی عددی مثال سے پیمانے کے سوال کی مشکل دُور ہو جائیگی:۔

عددی مثال — ایک ۱۶" × ۶" × ۶۲ پونڈ کی بیلے فولاد کی کڑی پر جس کا فصل ۲۴ فٹ ہے (اس کے ذاتی وزن سمیت) ۸ ٹن کا ایک پھیلا ہوا بوجھ ہے اور ۵ ٹن کا ایک منفرد بوجھ بائیں سہارے سے ۶ فٹ کے فاصلہ پر ہے۔ اعظم انصراف معلوم کرو۔ (شکل نمبر ۹۰)۔

شکل نمبر ۹۰۔ انصرافوں پر مثال

اس صورت میں ے = ۱۲۵۰۰ ٹن فی مربع انچ

آ = ۲۵۶۰۷ انچ اکائیاں

$\therefore$ آ ے = $\frac{۲۵۶۰۷ \times ۱۲۵۰۰}{۱۴۴}$ = ۲۲۹۰۰ مربع فٹ ٹن

پہلے ہر ایک بوجھ کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ کھینچو۔ اس کے لیے کوئی طولی پیمانہ مثلاً ۱" = ۴ فٹ، اور کوئی خماؤ کے معیار کا پیمانہ مثلاً ۱" = ۲۰ فٹ ٹن لو۔ اب خماؤ کے معیار کے نقشے کو چند مساوی حصوں میں تقسیم کرو، مثلاً ۱۲ حصوں میں، اور ہر ایک حصے کا وسطی معین کھینچو۔ اب معینوں کو قوتوں کے خطوط سمجھ کر ایک سمتی خط پر کسی تحویلی پیمانے مثلاً $\frac{1}{4}$ پر۔ ۰، ۱، ۲، ... تا ۱۲ قائم کرو۔

تب سمتی خط کا ایک انچ $\frac{4 \times 4 \times 20}{2} = 160$ مربع فٹ ٹن کو تعبیر کریگا کیونکہ قاعدے کا ہر ایک حصہ $\frac{1}{2}$ انچ ہے۔

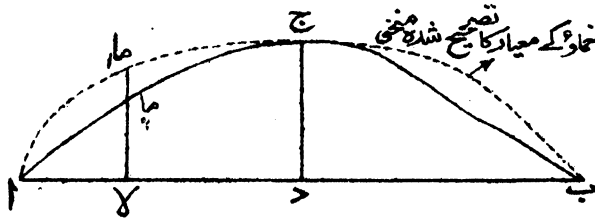
$\therefore$ اِس پیمانے پر آسے $= \frac{62980}{160} = 393.7$ انچ

صریحاً یہ طول تکلیف وہ ہے اس لیے $\frac{393.7}{60} = 6.56$ انچ لو۔ تب رسیمانی کثیر الاضلاع کا ایک انچ $\frac{393.7}{6.56}$ انچ انصراف کو تعبیر کریگا۔ پیمایش سے پایا جائیگا کہ رسیمانی کثیر الاضلاع کا اعظم معین ۰.۵۸ انچ ہے۔ اس لیے

اعظم انصراف $= 0.58 \times 8.0 = 4.64$ انچ

تراش کی تبدیلی کی رعایت — اب تک جتنی صورتوں پر غور کیا گیا اس مفروضے کے ساتھ کہ تراش مستقل ہے یا زیادہ صحیح یہ کہ معیارِ جمود آ سارے فصل میں مستقل ہے۔ اگر یہ صورت نہ ہو تو انصراف کو صحیح طور پر معلوم کرنے کے لیے پہلے خماؤ کے معیار کے منحنی میں اس طرح ترمیم کرنی ہوگی کہ تراش کی تبدیلی کی رعایت ہو جائے اور اس کا طریقہ حسبِ ذیل ہے :۔

فرض کرو کہ کسی شہتیر ا ب کے خماؤ کے معیار کا منحنی ا ج ب ہے (شکل ۱۹۱) اور فرض کرو کہ اعظم معیارِ جمود آد ہے جو د پر واقع ہوتا ہے۔ تب شہتیر پر کوئی نقطہ لو جس پر خماؤ کا معیار لاما ہے اور معیارِ جمود آلا ہے اور لاما، ایسا معلوم کرو کہ $\text{لاما}_1 = \frac{\text{لاما} \times \text{آد}}{\text{آلا}}$۔ یہی عمل فصل کے متعدد نقطوں پر کرو

اور ما کے جیسے جو نقطے حاصل ہونگے اُن کو ملاؤ۔ اِس طرح خماؤ کے معیار کا مصححہ منحنی

شکل ۹۱

حاصل ہوگا جس سے انصراف اوپر دیے ہوئے عمل کے ذریعے حاصل ہو سکینگے۔ اِس عمل میں آ سے حاصل کرنے میں آ کی قیمت آو لی جاتی ہے۔

یکساں مضبوطی اور مستقل گہرائی کے گرڈروں کے انصراف۔

اگر کسی شہتیر کی تراش اس طرح بدلے کہ اعظم زور سارے فصل میں یکساں ہوں تو صریحاً تراش کا مقیاس خماؤ کے معیار کے متناسب ہوگا اور اس طرح نسبت $\frac{م}{مق}$ مستقل ہوگی۔ اگر گرڈر کی گہرائی بھی مستقل ہو تو نسبت $\frac{م}{آ}$ بھی مستقل ہوگی اِس صورت میں خماؤ کے معیار کا مصحح منحنی ایک مستطیل ہوگا اور انصراف مور (Mohr) کے مسئلے سے اِس طرح معلوم ہو سکتے ہیں:—

گزشتہ صورتوں کی طرح صہ = $\frac{ب \times ما}{آ_ے}$

موجودہ صورت میں ب = $\frac{م \times ل}{۲}$ اور ما = $\frac{ل}{۴}$ کیونکہ منحنی ایک مستطیل ہے۔

$$\therefore \quad صہ = \frac{م ل^۲}{۸ آ_ے}$$

یکساں لداؤ کی صورت میں $م = \frac{و ل}{۸}$

$$\therefore \quad ص = \frac{و ل^{۳}}{۶۴ آ ے}$$

مرکزی بوجھ کی صورت میں $م = \frac{و ل}{۴}$

$$\therefore \quad ص = \frac{و ل^{۳}}{۳۲ آ ے}$$

اِس ربط کا ایک اور آسان ثبوت صفحہ ۲۸۴ پر ملیگا۔
مزید عددی مثالیں اس باب کے آخر میں دی جائینگی۔

انصراف ریاضیاتی نقطۂ نظر سے

مساوات (۳) سے $\frac{م}{آ ے} = \frac{۱}{سہ}$

اب اگر سہ بڑا ہو، جیسا کہ اِس صورت میں ہوگا، تو $\frac{۱}{سہ} = \frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$

$$\therefore \quad \frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}} = \frac{م}{آ ے}$$

$$\therefore \quad \frac{فر ما}{فر لا} = \text{شہتیر کا ڈھال} = \int \frac{م \; فر لا}{آ ے}$$

$$ما = \text{شہتیر کا انصراف} = \iint \frac{م \; فر لا \; فر لا}{آ ے}$$

اب ذیل کی معیاری صورتوں پر غور کرو (دیکھو شکل ۸۷)۔

(۱) سادہ سہارے ہوئے شہتیر پر مرکزی بوجھ و ــــ شہتیر کے مرکز سے فاصلہ لا پر ایک نقطہ ص پر غور کرو۔

تب $\text{م} = \frac{\text{و}}{۲}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{لا}\right)$

$$\therefore \iint \text{م}\ \text{فرلا}\ \text{فرلا} = \iint \frac{\text{و}}{۲}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{لا}\right)\text{فرلا}\ \text{فرلا}$$

$$\int \frac{\text{و}}{۲}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{لا}\right)\text{فرلا} = \frac{\text{ول لا}}{۴} - \frac{\text{و لا}^{۲}}{۴} + \text{ج}_{۱}$$

$$\therefore \iint \frac{\text{و}}{۲}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{لا}\right)\text{فرلا فرلا} = \int \frac{\text{ول لا}}{۴}\text{فرلا} - \int \frac{\text{و لا}^{۲}}{۴}\text{فرلا} + \int \text{ج}_{۱}\ \text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{ول لا}^{۲}}{۸} - \frac{\text{و لا}^{۳}}{۱۲} + \text{ج}_{۱}\text{لا} + \text{ج}_{۲}$$

لا = ۰ پر ڈھال صفر ہے اس لیے $\text{ج}_{۱} = ۰$ اور لا = $\pm \frac{\text{ل}}{۲}$ پر انحراف صفر ہے اس لیے

$$\frac{\text{ول}^{۳}}{۳۲} - \frac{\text{ول}^{۳}}{۹۶} + \text{ج}_{۲} = ۰$$

یعنی $\text{ج}_{۲} = \frac{-\text{ول}^{۳}}{۴۸}$

اعظم انحراف لا = ۰ پر ہوتا ہے اس لیے

$$\text{ص} = \frac{-\text{ج}_{۲}}{\text{آے}} = \frac{\text{ول}^{۳}}{۴۸\ \text{آے}}$$

(۲) سادہ سہارے ہوئے شہتیر پر یکساں بوجھ — حسب سابق

مرکز سے فاصلہ لا پر ایک نقطہ لینے سے

$$\text{م} = \frac{\text{ب ل}}{۲}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{لا}\right) - \frac{\text{ب}}{۲}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{لا}\right)^{۲}$$

$$= \frac{\text{ب}}{۲}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{لا}\right)\left(\text{ل} - \frac{\text{ل}}{۲} + \text{لا}\right)$$

$$= \frac{\text{ب}}{۲}\left(\frac{\text{ل}^{۲}}{۴} - \text{لا}^{۲}\right)$$

$$\int م\ فرلا = \frac{ب ل لا^{۲}}{۸} - \frac{ب لا^{۳}}{۶} + ج_{۱}$$

اور حسب سابق $ج_{۱} = ۰$

$$\therefore \int\int م\ فرلا\ فرلا = \int \frac{ب ل لا^{۲}}{۸}\ فرلا - \int \frac{ب لا^{۳}}{۶}\ فرلا$$

$$= \frac{ب ل^{۲} لا^{۲}}{۱۶} - \frac{ب لا^{۴}}{۲۴} + ج_{۲}$$

$$= ۰ \text{ جب کہ } لا = \frac{ل}{۲}$$

$$\therefore \quad -ج_{۲} = \frac{ب ل^{۴}}{۶۴} - \frac{ب ل^{۴}}{۳۸۴}$$

$$= ب ل^{۴} \left\{\frac{۶-۱}{۳۸۴}\right\} = \frac{۵ ب ل^{۴}}{۳۸۴}$$

تب اعظم انصراف $لا = ۰$ پر واقع ہوتا ہے اس لیے

$$ص = \frac{-ج_{۲}}{آ ے} = \frac{۵ ب ل^{۴}}{۳۸۴ آ ے} = \frac{۵ و ل^{۳}}{۳۸۴ آ ے}$$

(۳) برآمدہ بیرم پر منفرد بوجھ کسی مقام پر۔ بوجھ سے فاصلہ لا پر نقطۂ ص پر غور کرو۔

$$م = - و لا$$

$$\therefore \text{ ڈھال} \times آ ے = \int م\ فرلا$$

$$= -\frac{و لا^{۲}}{۲} + ج_{۱}$$

$لا = ل$ پر، ڈھال $= ۰$

$$\therefore \quad ج_{۱} = \frac{و ل^{۲}}{۲}$$

$$\therefore \text{ آ ے} \times \text{بوجھ کے نیچے ڈھال} = \frac{و ل^{۲}}{۲}$$

$$\text{انصراف} = \iint \frac{\text{م فرلا فرلا}}{\text{آ ے}}$$

$$= \left(-\frac{\text{و لا}^{3}}{6} + \frac{\text{و ل}^{2}\,\text{لا}}{2} + \text{ج}_{2}\right) \times \frac{1}{\text{آ ے}}$$

لا = ل پر انصراف = ۰

$$\therefore \quad \text{ج}_{2} = \frac{\text{و ل}^{3}}{6} - \frac{\text{و ل}^{3}}{2} = -\frac{\text{و ل}^{3}}{3}$$

∴   لا = ۰ پر یعنی بوجھ کے نیچے انصراف

$$= \frac{\text{ج}_{2}}{\text{آ ے}} = -\frac{\text{و ل}^{3}}{3} \times \frac{1}{\text{آ ے}}$$

آزاد سرے پر انصراف = بوجھ کے نیچے انصراف + بوجھ کے نیچے ڈھال × (ل - ل)

$$= \left\{-\frac{\text{و ل}^{3}}{3} - \frac{\text{و ل}^{2}}{2}(\text{ل} - \text{ل})\right\} \frac{1}{\text{آ ے}}$$

$$= -\frac{\text{و}}{\text{آ ے}} \left\{\frac{\text{ل}^{2}\,\text{ل}}{2} - \frac{\text{ل}^{3}}{6}\right\}$$

$$= -\frac{\text{و ل}^{2}}{2\,\text{آ ے}} \left(\text{ل} - \frac{\text{ل}}{3}\right)$$

منفی علامت سے صرف یہ ظاہر ہوتا ہے کہ انصراف نیچے کی جانب ہے۔ اس کو نظر انداز کرنے سے

$$\text{اعظم انصراف} = \text{صہ} = \frac{\text{و ل}^{2}}{2\,\text{آ ے}} \left(\text{ل} - \frac{\text{ل}}{3}\right)$$

(۴) برآمدہ بیرم کے آزاد سرے پر منفرد بوجھ ——— یہ اوپر کی صورت میں ل = ل رکھنے سے حاصل ہوگا۔ یعنی

$$\text{ص} = \frac{\text{و ل}^3}{3\ \text{آ} \text{ے}}$$

(۵) برآمدہ بیرم پر یکساں بوجھ ثابت سرے سے کسی نقطے طول تک۔

اِس صورت میں $\text{م} = \frac{-\text{ب لا}^2}{2}$

$\therefore$ ڈھال × آ ے = $\int$ م فرلا

$$= \frac{-\text{ب لا}^3}{6} + \text{ج}_1$$

لا = ل پر ڈھال = ۰

$$\therefore \quad \text{ج}_1 = \frac{\text{ب ل}^3}{6}$$

$\therefore$ آ ے × بوجھ کے نیچے ڈھال $= \frac{\text{ب ل}^3}{6}$

آ ے × انصراف = $\int\int$ م فرلا فرلا

$$= \frac{-\text{ب لا}^4}{24} + \frac{\text{ب ل}^3\ \text{لا}}{6} + \text{ج}_2$$

لا = ل پر انصراف = ۰

$$\therefore \quad \text{ج}_2 = \frac{\text{ب ل}^4}{24} - \frac{\text{ب ل}^4}{6} = \frac{-\text{ب ل}^4}{8}$$

$\therefore$ آ ے × بوجھ کے نیچے انصراف، (جہاں لا = ۰)

$$= \text{ج}_2 = \frac{-\text{ب ل}^4}{8}$$

$\therefore$ آ ے × آزاد سرے پر انصراف $= \frac{-\text{ب ل}^4}{8}$ + آ ے × بوجھ کے نیچے ڈھال × (ل - ل)

$$= \frac{-\text{ب ل}^4}{8} + (\text{ل} - \text{ل})\left(\frac{-\text{ب ل}^3}{6}\right)$$

$$\left\{ \frac{\text{ل}}{۲} - \frac{\text{ل}}{۳} + \frac{\text{ل}}{۴} \right\} \frac{-\text{ب ل}^{۳}}{۲} =$$

$$\left\{ \frac{\text{ل}}{۱۲} - \frac{\text{ل}}{۳} \right\} \frac{-\text{ب ل}^{۳}}{۲} =$$

$$\left(\frac{\text{ل}}{۴} - \text{ل} \right) \frac{-\text{ب ل}^{۳}}{۶} =$$

$$\left(\frac{\text{ل}}{۴} - \text{ل} \right) \frac{-\text{و ل}^{۲}}{۶} =$$

منفی علامت کو نظر انداز کرنے سے

$$\left(\frac{\text{ل}}{۴} - \text{ل} \right) \frac{\text{و ل}^{۲}}{۶\ \text{آ ے}} = \text{صہ}$$

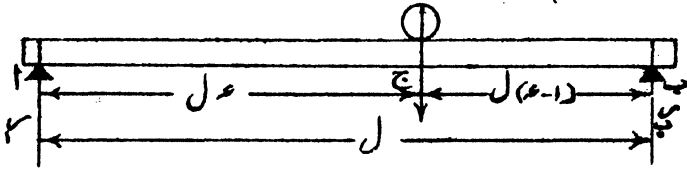
(۶) بر آمدہ بیرم کے سارے طول پر یکساں بوجھ ——

یہ گزشتہ صورت میں ل = ل رکھنے سے حاصل ہوگا۔

$$\left(\frac{\text{ل}}{۴} - \text{ل} \right) \frac{\text{و ل}^{۲}}{۶\ \text{آ ے}} = \text{صہ} \quad \therefore$$

$$\frac{\text{و ل}^{۳}}{۸\ \text{آ ے}} =$$

(۷) سادہ سہارے ہوئے شہتیر پر منفرد بوجھ کسی نقطے پر۔

فرض کرو کہ فصل ل کے ایک شہتیر ا ب کے ایک نقطہ ج پر جس کا فاصلہ ا سے عہ ل ہے بوجھ و رکھا گیا ہے (شکل ۹۲)۔ ب سے اس کا فاصلہ (۱-عہ) ل ہوگا۔

$$\text{و عہ} = \frac{\text{و عہ ل}}{\text{ل}} = \text{ر}_{\text{ب}} \qquad \text{تب}$$

$$\text{ر}_{\text{ا}} = \frac{\text{و}(\text{۱}-\text{ع})\text{ل}}{\text{ل}} = \text{و}(\text{۱}-\text{ع})$$

شکل ۹۲

ا اور ج کے درمیان ا سے فاصلہ لا پر ایک نقطہ پر غور کرو۔

$$\text{م}_{\text{لا}} = \text{ر}_{\text{ا}} \times \text{لا} = \text{و}(\text{۱}-\text{ع})\,\text{لا}$$

$$\therefore \text{آ سے} \frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{۲}}} = \text{و}(\text{۱}-\text{ع})\,\text{لا} \quad \ldots\ldots (\text{۱})$$

$$\therefore \text{آ سے} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{و}(\text{۱}-\text{ع})\,\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۲}} + \text{ج}_{\text{۱}} \quad \ldots\ldots (\text{۲})$$

$$\text{آ سے ما} = \frac{\text{و}(\text{۱}-\text{ع})\,\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۶}} + \text{ج}_{\text{۱}}\text{لا} + \text{ج}_{\text{۲}} \quad \ldots\ldots (\text{۳})$$

اب ج اور ب کے درمیان ا سے فاصلہ لا۱ پر ایک نقطے پر غور کرو۔

$$\text{م}_{\text{لا}_\text{۱}} = \text{ر}_{\text{ا}} \times \text{لا}_{\text{۱}} - \text{و}(\text{لا}_{\text{۱}} - \text{ع ل})$$

$$= \text{و}(\text{۱}-\text{ع})\,\text{لا}_{\text{۱}} - \text{و لا}_{\text{۱}} + \text{و ع ل}$$

$$= \text{و ع ل} - \text{و ع لا}_{\text{۱}}$$

$$\therefore \text{آ سے} \frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فر لا}_{\text{۱}}^{\text{۲}}} = \text{و ع ل} - \text{و ع لا}_{\text{۱}} \quad \ldots\ldots (\text{۴})$$

$$\therefore \text{آ سے} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{و ع ل لا}_{\text{۱}} - \text{و ع}\frac{\text{لا}_{\text{۱}}^{\text{۲}}}{\text{۲}} + \text{ج}_{\text{۳}} \quad \ldots\ldots (\text{۵})$$

$$\text{آ ے ما} = \frac{\text{و ع ل لا}_1^{2}}{۲} - \frac{\text{و ع لا}_1^{3}}{۶} + \text{ج}_3\,\text{لا}_1 + \text{ج}_4 \quad\ldots\ldots(۶)$$

مساوات (۳) میں چونکہ لا = ۰ پر ما = ۰ اس لیے

$$\text{ج}_2 = ۰$$

مساوات (۶) میں چونکہ لا = ل پر $\text{ما}_2 = ۰$ اس لیے

$$\frac{\text{و ع ل}^3}{۲} - \frac{\text{و ع ل}^3}{۶} + \text{ج}_3\,\text{ل} + \text{ج}_4 = ۰$$

$$\therefore\quad \text{ج}_4 = \frac{-\text{و ع ل}^3}{۳} - \text{ج}_3\,\text{ل} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(۷)$$

یہ دو مساواتیں لچک کے خط کے اُن حصوں کو تعبیر کرتی ہیں جن میں سے ایک بوجھ کے اس طرف ہے اور ایک اُس طرف۔

ان کے ڈھال اور معین ان کے مشترک نقطے

$$\text{لا} = \text{لا}_1 = \text{ع ل}$$

پر دونوں حصوں میں مساوی ہونگے اس لیے لا اور لا_1 کی اِس قیمت کو مساوات (۲) اور (۵) میں رکھ کر دونوں کو مساوی رکھنے سے:

$$\frac{\text{و}(۱-\text{ع})\text{ع}^2\text{ل}^2}{۲} + \text{ج}_1 = \text{و ع}^2\text{ل}^2 - \frac{\text{و ع}^2\text{ل}^2}{۲} + \text{ج}_3$$

یعنی

$$\text{ج}_1 = \frac{\text{و ع}^2\text{ل}^2}{۲} + \text{ج}_3 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(۸)$$

اسی طرح مساواتوں (۳) اور (۶) سے حاصل ہوگا:

$$\frac{\text{و}(۱-\text{ع})\text{ع}^3\text{ل}^3}{۶} + \text{ج}_1\,\text{ع ل} = \frac{\text{و ع}^3\text{ل}^3}{۲} - \frac{\text{و ع}^3\text{ل}^3}{۶} + \text{ج}_3\,\text{ع ل} + \text{ج}_4$$

$$\therefore\quad \text{ج}_1\,\text{ع ل} = \frac{\text{و ع}^3\text{ل}^3}{۳} + \text{ج}_3\,\text{ع ل} - \frac{\text{و ع ل}^3}{۳} - \text{ج}_3\,\text{ل}$$

$$\text{ج}_1\,\text{ع} = \frac{\text{و ع}^3\text{ل}^2}{۳} - \frac{\text{و ع ل}^2}{۳} + \text{ج}_3\,(\text{ع}-۱)$$

$$= \frac{\text{و ع}^3\text{ل}^2}{۳} - \frac{\text{و ع ل}^2}{۳} + \left(\text{ج}_1 - \frac{\text{و ع}^2\text{ل}^2}{۲}\right)(\text{ع}-۱)$$

$$\therefore\ \text{ج}_1 = \frac{\text{و ع}^3\text{ ل}^2}{۳} - \frac{\text{و ع ل}^2}{۳} - \frac{\text{و ع}^3\text{ ل}^2}{۲} + \frac{\text{و ع}^2\text{ ل}^2}{۲}$$

$$= -\text{و ع ل}^2\left(\frac{۱}{۳} + \frac{\text{ع}^2}{۶} - \frac{\text{ع}}{۲}\right)$$

$$= \frac{-\text{و ع ل}^2}{۶}\left(۲ - ۳\text{ع} + \text{ع}^2\right)$$

$$= \frac{-\text{و ع ل}^2}{۶}\left(۱-\text{ع}\right)\left(۲-\text{ع}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۹)$$

∴ مساوات (۳) یہ ہو جاتی ہے:-

$$\text{آ}_{\text{ے ما}} = \frac{\text{و}(۱-\text{ع})\text{ لا}^3}{۶} - \frac{\text{و ع ل}^2\text{ لا}}{۶}(۱-\text{ع})(۲-\text{ع}) \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

فرض کرو کہ $\text{ع} > \frac{۱}{۲}$، تب اعظم انصراف ا اور ج کے درمیان واقع ہوگا۔ ما اعظم ہوگا جب کہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۰$

یعنی جب کہ $\frac{\text{و}(۱-\text{ع})\,۳\text{ لا}^2}{۶} - \frac{\text{و ع ل}^2}{۶}(۱-\text{ع})(۲-\text{ع}) = ۰$

$$\text{یا}\quad \text{لا}^2 = \frac{\text{ل}^2\text{ ع}(۲-\text{ع})}{۳}$$

$$\text{یا}\quad \text{لا} = \text{ل}_{\text{ما}}\sqrt{\frac{\text{ع}(۲-\text{ع})}{۳}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

اس قیمت کو مساوات (۱۰) میں درج کرنے سے

$$\text{آ}_{\text{ے صہ}} = \frac{\text{و ل}^3(۱-\text{ع})}{۶}\cdot\left\{\frac{\text{ع}(۲-\text{ع})}{۳}\right\}^{\frac{۳}{۲}} - \frac{\text{و ع ل}^2\times\text{ل}}{۶}\left\{\frac{\text{ع}(۲-\text{ع})}{۳}\right\}^{\frac{۱}{۲}}\times(۱-\text{ع})(۲-\text{ع})$$

$$= \text{و ل}^3(۱-\text{ع})\left\{\frac{\text{ع}(۲-\text{ع})}{۳}\right\}^{\frac{۳}{۲}}\left(\frac{۱}{۶} - \frac{۳}{۶}\right)$$

$$= \frac{و\, ل^3}{3} (1-ع) \left\{\frac{ع(2-ع)}{3}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{یا}\quad صہ = \frac{و\, ل^3 (1-ع)}{3\, آ\, ے} \left\{\frac{2ع - ع^2}{3}\right\}^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

بوجھ کے نیچے انصراف مساوات (۱۰) میں لا = ع ل رکھنے سے حاصل ہوگا۔

اس طرح :-

$$آ\, ے\, ما = \frac{و(1-ع)\, ع^3 ل^3}{6} - \frac{و\, ع\, ل^3}{6} (1-ع)(2-ع)$$

$$= \frac{و\, ع^2 ل^3 (1-ع)}{6} \left[ع - (2-ع)\right]$$

$$\therefore \quad ما = \frac{و\, ع^2 ل^3 (1-ع)^2}{3\, آ\, ے} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

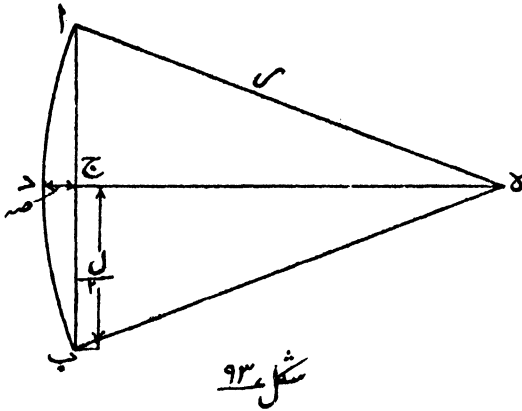
یکساں مضبوطی اور متوازی کوروں کے گرڈر کا انصراف۔

اگر گرڈر کے طول میں تراش اس طرح بدلے کہ زور مستقل ہو تو $\frac{م}{مق}$ مستقل ہوگا اور اگر گہرائی بھی مستقل ہو تو $\frac{م}{آ}$ بھی مستقل ہوگا۔ اب اگر ے کو بھی مستقل مان لیا جائے تو

$$\frac{1}{ر} = \frac{م}{آ\, ے} = \text{مستقل}$$

یعنی جہاں کہیں $\frac{م}{آ\, ے}$ مستقل ہو، شہتیر خم ہو کر دائرے کی ایک قوس بن جاتا ہے۔

فرض کرو کہ شکل ۹۳ ایک شہتیر کو تعبیر کرتی ہے جو خم ہو کر ایک دائرے کی قوس بن گیا ہے۔ (نوٹ: شکل کی آسانی کے لیے شہتیر کو افقی کی بجائے انتصابی وضع میں دکھایا گیا ہے۔)

شکل ۹۳

اب اگر دائرے کا مرکز ھ ہو اور شہتیر کا انصراف ج د ہو تو دائرے کے خواص سے

$$\text{ج د}\,(\text{ج ھ} + \text{ھ د}) = \text{ا ج}^2$$

اس میں چونکہ ج د بہت چھوٹا ہے اس لیے یوں لکھا جا سکتا ہے:-

$$\text{صہ} \times 2\,\text{ر} = \left(\frac{\text{ل}}{2}\right)^2 = \frac{\text{ل}^2}{4}$$

$$\therefore \quad \text{صہ} = \frac{\text{ل}^2}{8\,\text{ر}}$$

$$\text{لیکن} \quad \frac{1}{\text{ر}} = \frac{\text{م}}{\text{آ ے}}$$

$$\therefore \quad \text{صہ} = \frac{\text{م ل}^2}{8\,\text{آ ے}}$$

شہتیروں اور لداؤں کے مختلف اقسام کے انصرافوں کا ایک تختہ صفحہ ۲۷۲ پر دیا گیا ہے۔

خماؤ کی بازگشتگی — کسی شہتیر میں خماؤ کے ذریعے ایک خاص زور

پیدا کرنے میں جو کام صرف ہو وہ حسب ذیل طریقے پر معلوم کیا جا سکتا ہے :-
کسی جفت کا کام ایک زاویہ طے کرنے میں مساوی ہے جفت کا معیار ضرب طے کردہ زاویہ۔ اس لیے اگر ایک شہتیر کا ایک چھوٹا حصہ جس پر خماؤ کا معیار م عمل کر رہا ہو ڈھال فرعہ میں خم ہو جائے تو خماؤ کا کام $\frac{م\ فرعہ}{۲}$ ہوگا کیونکہ م بتدریج صفر سے قیمت م کو پہنچتا ہے۔

$$\therefore \text{پورے شہتیر کے خماؤ کا کام} = ک = \int \frac{م\ فرعہ}{۲}$$

$$\text{لیکن } \frac{فرعہ}{فرلا} = \frac{۱}{ر} \text{ یعنی } \frac{۱}{ر} = \text{ڈھال کی تبدیلی کی شرح}$$

$$\therefore ک = \int \frac{م}{۲ ر} فرلا$$

$$\text{لیکن } \frac{۱}{ر} = \frac{م}{آ ے}$$

$$\therefore ک = \int \frac{م^۲}{۲ آ ے} فرلا$$

اگر خماؤ کا معیار مستقل ہو اور تراش مستطیلی ہو تو

$$ک = \frac{م^۲}{۲ آ ے} \int^{ل} فرلا = \frac{م^۲ ل}{۲ آ ے}$$

$$\text{لیکن } م^۲ = \frac{ز^۲ آ^۲}{ق^۲}$$

$$\therefore ک = \frac{ز^۲ آ ل}{۲ ے ق^۲}$$

$$\text{اب } آ = \frac{ض گ^۳}{۱۲} ، ق = \frac{گ}{۲}$$

$$\therefore \quad \text{ک} = \frac{\text{ز}^{۲}}{\text{ے}} \times \frac{۴ \times \text{ض گ}^{۳} \times \text{ل}}{۲ \times ۱۲ \times \text{گ}^{۲}}$$

$$= \frac{\text{ز}^{۲}}{۶\,\text{ے}} \times \text{ح}$$

جہاں ح شہتیر کا حجم ہے۔

$$\therefore \quad \text{بازگشتگی} = \frac{\text{ک}}{\text{ح}} = \frac{\text{ز}^{۲}}{۶\,\text{ے}}$$

اگر بوجھ منقسم ہو اور تراش مستطیلی ہو تو نصف شہتیر پر غور کرو۔

فرض کرو کہ لا بیل پایہ سے فاصلہ ہے۔

$$\text{تب} \quad \text{م} = \frac{\text{و لا}}{۲}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ک}}{۲} = \int_{0}^{\frac{\text{ل}}{۲}} \frac{\text{م}^{۲}\,\text{فلا}}{۲\,\text{آ ے}}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\text{ل}}{۲}} \frac{\text{و}^{۲}\,\text{لا}^{۲}\,\text{فلا}}{۸\,\text{آ ے}}$$

$$= \frac{\text{و}^{۲}\,\text{ل}^{۳}}{۱۹۲\,\text{آ ے}}$$

$$\text{ک} = \frac{\text{و}^{۲}\,\text{ل}^{۳}}{۹۶\,\text{آ ے}} = \frac{۱}{۲}\,\text{و} \times \text{ص}$$

$$\text{مرکز پر} \quad \text{م} = \frac{\text{و ل}}{۴} = \frac{\text{ز آ}}{\text{ق}}$$

$$\therefore \quad \text{ک} = \frac{\text{ز}^{۲}\,\text{آ}^{۲}\,\text{ل}}{۶\,\text{آ ے ق}^{۲}}$$

$$= \frac{ز^{۲}}{۶\,ے} \times \frac{آ\,ل}{ق\,ی}$$

$$\text{حسب سابق } آ = \frac{ض\,گ^{۳}}{۱۲} ،\quad ق = \frac{گ}{۲}$$

$$\therefore\ ک = \frac{ز^{۲}}{۶\,ے} \times \frac{۴\,ض\,گ^{۳}\,ل}{۱۲\,گ^{۲}}$$

$$= \frac{ز^{۲}}{۱۸\,ے} \times ح$$

$$\therefore\ \text{بازگشتگی} = \frac{ک}{ح} = \frac{ز^{۲}}{۱۸\,ے}$$

مور (Mohr) کے مسئلہ کی مزید مثالیں ۔۔۔۔ اب ہم انصراف کی دریافت میں مور کے مسئلے کے استعمال کی چند مزید صورتیں پیش کرینگے۔ پہلی صورت میں معمولی طریقے سے ذرا انحراف کیا گیا ہے یعنی خیالی ردِّ عمل استعمال کیے گئے ہیں۔ یہ طریقہ اِس مسئلے کے تمام استعمالوں میں اختیار کیا جا سکتا ہے۔

(۱) ایسے شہتیر کا اعظم انصراف معلوم کرنا جس پر ایک سرے سے مرکز تک یکساں بوجھ ہو۔

اس لداؤ کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ منحنی د ت گ ع (شکل ۱۹۳ء) ہوگا جس میں حصہ د ت گ ایک مکافی ہے جس کو خط ع گ ایک مماس ہے۔

ہم کو پہلے یہ معلوم کرنا ہے کہ یہ اعظم انصراف کہاں واقع ہوگا۔ یہ اُس قاعدے کے ذریعے سے معلوم ہوگا کہ کسی شہتیر میں اعظم خماؤ کا معیار اُس مقام پر واقع ہوگا جہاں جز صفر ہو۔ اس لیے ہم نقشہ د گ ع کو بوجھ کا نقشہ سمجھینگے۔

اگر ع گ کو ہ تک خارج کیا جائے تو منحنی د ت گ ایک مکافی ہوگا

شکل ۱۹۳ ا

شہتیروں کے انحراف

جو اس خط کو گ پر مس کریگا اور موجودہ مسئلے میں اس میں آسانی ہوگی کہ خماؤ کے معیار کے نقشے کو مثلث د ہ ع اور مکافی ٹکڑے د گ ہ کے فرق کی شکل میں لیا جائے۔

پہلا کام یہ ہے کہ ع پر کا خیالی ردِّ عمل ر۲ع معلوم کیا جائے۔ اس کے لیے مثلث کے رقبے کو ایک قوت ق۲ سمجھو جو اس کے مرکزِ جاذبہ میں سے عمل کرتی ہے جو د سے فاصلہ ل/۲ پر ہے۔

تب ق۲ = مثلث د ہ ع کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\ \text{د ہ} \times \text{د ع} = \frac{\text{و ل}^3}{16}$$

مکافی ٹکڑے کے رقبے کو ایک اُوپر وار قوت ق۱ سمجھو جو اُس کے

مرکز جاذبہ میں سے عمل کرتی ہے، جو د سے فاصلہ $\frac{\text{ل}}{۸}$ پر ہوگا۔

تب $\text{ق}_۱ = \text{رقبہ د ف گ ہ} = \frac{۱}{۳}\ \text{ہ د} \times \text{د ک}$

$$= \frac{\text{و ل}^۲}{۸ \times ۳} \times \frac{\text{ل}}{۲} = \frac{\text{و ل}^۳}{۴۸}$$

ع پر کے خیالی ردِّ عمل $\text{ر}_\text{ع}$ کے لیے د کے گرد معیار لینے سے

$$\text{ق}_۲ \times \frac{\text{ل}}{۳} - \text{ق}_۱ \times \frac{\text{ل}}{۸} = \text{ر}_\text{ع} \times \text{ل}$$

$$\therefore \quad \text{ر}_\text{ع} = \frac{\text{ق}_۲}{۳} - \frac{\text{ق}_۱}{۸}$$

$$= \frac{\text{و ل}^۳}{۴۸} - \frac{\text{و ل}^۳}{۴۸ \times ۸} = \frac{۷\,\text{و ل}^۳}{۳۸۴} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

فرض کرو کہ اعظم انصراف مرکز سے فاصلہ لا پر نقطہ ن پر واقع ہوتا ہے۔

تب اِس نقطے پر خیالی جزی قوت = ۰

$$\text{ن پر جز} = \text{ر}_\text{ع} - \text{رقبہ ن ص ع} + \text{رقبہ ص ت گ}$$

$$= \frac{۷\,\text{و ل}^۳}{۳۸۴} - \frac{\text{و ل}(\frac{\text{ل}}{۲}+\text{لا})}{۸} \times \frac{(\text{لا}+\frac{\text{ل}}{۲})}{۲} + \frac{\text{و لا}^۲}{۲} \times \frac{\text{لا}}{۳}$$

$$= \frac{۷\,\text{و ل}^۳}{۳۸۴} - \frac{\text{و ل}}{۱۶}\left(\frac{\text{ل}^۲}{۴} + \text{ل لا} + \text{لا}^۲\right) + \frac{\text{و لا}^۳}{۶}$$

$$= \frac{۷\,\text{و ل}^۳}{۳۸۴} - \frac{\text{و ل}^۳}{۶۴} - \frac{\text{و ل}^۲\,\text{لا}}{۱۶} - \frac{\text{و ل لا}^۲}{۱۶} + \frac{\text{و لا}^۳}{۶}$$

$$= \frac{\text{و ل}^۳}{۳۸۴} + \frac{\text{و لا}^۳}{۶} - \frac{\text{و ل}^۲\,\text{لا}}{۱۶} - \frac{\text{و ل لا}^۲}{۱۶}$$

یہ اگر صفر ہو تو $\frac{\text{و}}{۳۸۴}$ سے تقسیم کر کے رقموں کو ترتیب دینے سے

۶۴ لا^{۳} − ۲۴ لا^{۲} ل − ۲۴ لا ل^{۲} + ۱ = ۰

یا　۶۴ (لا/ل)^{۳} − ۲۴ (لا/ل)^{۲} − ۲۴ (لا/ل) + ۱ = ۰　.... (۲)

یہ ایک کعبی مساوات ہے جس کو بالراست حل نہیں کیا جا سکتا۔
آزمایش کے ذریعے اس طرح حل کیا جائیگا:—

اگر لا = ۰　تو دائیں جانب جس کو ما کہا جائیگا = + ۱

اگر لا = ٫۱ تو ما = ٫۰۶۴ + ٫۲۴ − ۲٫۴ + ۱ = −۱٫۵۷۶

اگر لا = ٫۰۵ تو ما = ٫۰۰۸ − ٫۰۶ − ۱٫۲ + ۱ = −٫۲۵۲

اگر لا = ٫۰۴ تو ما = ٫۰۰۴۱ − ٫۰۳۸ − ٫۹۶ + ۱ = + ٫۰۰۶

اگر ما کی قیمتیں لا کے بالمقابل ترسیم کی جائیں تو معلوم ہوگا کہ لا = تقریباً ٫۰۴۰۶ کے لیے ما صفر ہوتا ہے، اور عملی اغراض کے لیے لا = ٫۰۴ لے سکتے ہیں۔

اعظم انصراف کا نقطہ معلوم کر لینے کے بعد اِس نقطے پر انصراف صن کی قیمت معلوم کرنا ہے۔

پہلے نقطہ ن پر خیالی خماؤ کا معیار ھ$_{۱}$ معلوم کرو۔

ھ$_{۱}$ = سا$_{ع}$ (ل/۲ + لا) + حصہ ص ن گ کا معیار ـ مثلث ص ن ع کا معیار

= ۷ و ل^{۳}/۳۸۴ + ٫۵۴ ل + (و × (٫۰۴ ل)^{۲})/۲ × ٫۰۴ ل/۳ × ٫۰۴ ل/۴

= و ل/۸ × ٫۵۴ ل × ٫۵۴ ل/۳ × ٫۵۴ ل/۲

= و ل^{۴} {٫۰۰۹۶۴ + ٫۰۰۰۰۱ − ٫۰۰۳۲۸}

= ٫۰۰۶۳۷ و ل^{۴}

$$\therefore \quad \text{ص} = \frac{\text{م}}{\text{آ ے}} = \frac{0.00637\ \text{و ل}^4}{\text{آ ے}} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

مقابلے کی دلچسپی کے لیے اس صورت پر غور کرو کہ یہی بوجھ پورے فصل پر منقسم ہوتا تو

$$\text{ص} = \frac{5}{384} \cdot \frac{\text{و ل}^3}{\text{آ ے}} \quad \text{(مشہور ضابطے سے)}$$

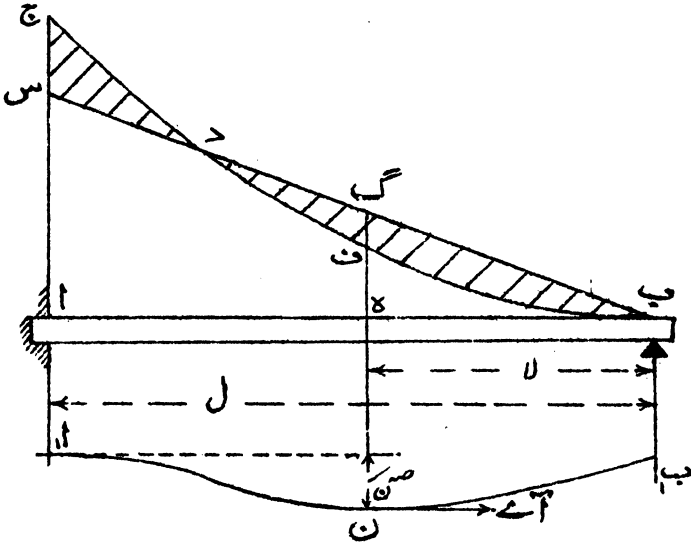
اس میں $\text{و} = \frac{\text{و ل}}{2}$

$$\therefore \quad \text{ص} = \frac{5}{768} \cdot \frac{\text{و ل}^4}{\text{آ ے}} = \frac{0.00651\ \text{و ل}^4}{\text{آ ے}} \quad \ldots\ldots (4)$$

اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر انصراف کے اغراض کے لیے موجودہ صورت کو وہ صورت خیال کیا جائے کہ یہی بوجھ پورے فصل پر منقسم ہو تو بہت ہی خفیف غلطی واقع ہوگی جو اس امر کے مدِنظر قابلِ نظر انداز ہوگی کہ عملی حالات نظری حالات سے کس قدر مختلف ہوتے ہیں۔ لیکن یہ یاد رہے کہ اعظم انصراف مرکز پر نہیں بلکہ خالی سرے سے ۰۵ء۴ ل کے فاصلے پر واقع ہوگا۔

(۲) ایسے یکساں لدے ہوئے شہتیر کا اعظم انصراف معلوم کرنا جو ایک سرے پر ثابت اور دوسرے پر سہارا ہوا ہو۔

اِس صورت کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ شکل ۹۳۔ ب کے مطابق ہوگا۔ منحنی ب د ج ایک مکافی ہے جس کا ارتفاع $\frac{\text{و ل}^2}{2}$ ہے جہاں و بوجھ فی اکائی طول شہتیر ہے اور یہ منحنی برآمدہ یرم پر ہموار یکساں بوجھ سے پیدا ہونے والے خماؤ کے معیار کا نقشہ ہے اور ب س ایک خطِ مستقیم ہے جس میں ا س = $\frac{3\ \text{و ل}^2}{8}$، اور یہ ب پر کے ردِّ عمل $\frac{3\ \text{و ل}}{8}$ سے پیدا ہونے والے خماؤ کے معیار کا نقشہ ہے۔

ہمارا پہلا کام یہ ہے کہ وہ نقطہ ن معلوم کریں جس پر انصراف اعظم ہوتا ہے۔

شکل ۹۳ ب۔ شہتیروں کے انصراف

خیالی طناب کے محل ا ن پر غور کرو۔ اس پر عمل کرنے والی قوتیں یہ ہیں:۔ ن پر ایک افقی تناؤ آ ہے اور ا پر ایک مساوی افقی تناؤ کیونکہ شہتیر ثابت سرے ا پر افقی ہے اور ایک انتصابی قوت رقبہ ج س د کے مساوی اوپر وار کیونکہ یہ رقبہ منفی ہے اور ایک انتصابی قوت رقبہ د ف گ کے مساوی نیچے کو کیونکہ یہ رقبہ مثبت ہے۔

اگر یہ قوتیں تعادل میں ہیں تو چونکہ افقی قوتیں مساوی اور مخالف ہیں اس لیے انتصابی قوتیں بھی مساوی اور مخالف ہونگی۔ اس طرح ذیل کا قاعدہ حاصل ہوتا ہے:۔

اعظم انصراف اُس نقطے پر واقع ہوگا جہاں رقبہ د ف گ رقبہ د س ج کے مساوی ہو۔

یہ کہنا بالکل اس کے مترادف ہوا کہ رقبہ ا ہ گ س رقبہ ا ہ ف ج کے مساوی ہو۔

اب، اگر ہ ب = لا اور ا ب = ل تو

$$\frac{\text{ہ گ}}{\text{لا}} = \frac{\text{ا س}}{\text{ل}}$$

یعنی

$$\text{ہ گ} = \frac{\text{لا} \times \text{ا س}}{\text{ل}}$$

رقبہ

$$\text{ا ہ گ س} = \frac{\text{ا ہ}}{۲} (\text{ا س} + \text{گ ہ})$$

$$= \frac{\text{ل} - \text{لا}}{۲} \times \text{ا س} \left(۱ + \frac{\text{لا}}{\text{ل}}\right)$$

$$= \frac{(\text{ل} - \text{لا})}{۲} \times \frac{(\text{ل} + \text{لا})}{\text{ل}} \times \frac{۳\,\text{و}\,\text{ل}^۲}{۸}$$

$$= \frac{۳\,\text{و}}{۱۶} (\text{ل}^۲ - \text{لا}^۲) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

نیز رقبہ ا ہ ف ج = رقبہ ا ب د ج ۔ رقبہ ہ ف ب

$$= \frac{۱}{۳}\,\text{ا ج} \times \text{ا ب} - \frac{۱}{۳}\,\text{ف ہ} \times \text{ہ ب}$$

$$= \frac{۱}{۳}\,\frac{\text{و}\,\text{ل}^۳}{۲} - \frac{۱}{۳}\,\frac{\text{و}\,\text{لا}^۳}{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اگر (۱) = (۲) تو

$$\frac{۳\,\text{و}\,\text{ل}}{۱۶} (\text{ل}^۲ - \text{لا}^۲) = \frac{\text{و}}{۶} (\text{ل}^۳ - \text{لا}^۳)$$

اجزائے ضربی لینے سے

یا

$$\frac{۳\,\text{و}\,\text{ل}}{۱۶} (\text{ل} + \text{لا})(\text{ل} - \text{لا}) = \frac{\text{و}}{۶} (\text{ل} - \text{لا})(\text{ل}^۲ + \text{ل}\,\text{لا} + \text{لا}^۲)$$

$\frac{\text{و}}{۲}$ (ل ۔ لا) سے تقسیم کرنے سے اور ضرب چلیپائی سے

$$۹\,\text{ل}^۲ + ۹\,\text{ل}\,\text{لا} = ۸\,\text{ل}^۲ + ۸\,\text{ل}\,\text{لا} + ۸\,\text{لا}^۲$$

یا

$$۸\,\text{لا}^۲ - \text{ل}\,\text{لا} - \text{ل}^۲ = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اِس مساوات درجۂ دوم کا عام حل یہ ہوگا:-

$$لا = \frac{ل \pm \sqrt{ل^2 + ۳۲ ل^2}}{۱۶}$$

$$= \frac{ل (۱ \pm \sqrt{۳۳})}{۱۶}$$

منفی قیمت ناقابِلِ قبول ہے۔

$$\therefore \quad لا = \frac{ل (۱ + \sqrt{۳۳})}{۱۶} = ۰۴۲۲\text{ل تقریباً}$$

یعنی اعظم انصراف سادہ سہارے کے سر سے ۰۴۲۲ ل کے فاصلہ پر واقع ہوتا ہے۔

اب ہم اعظم انصراف صن خیالی طناب کے حصہ ن ب کے تعادل پر غور کرنے سے معلوم کرینگے۔ اس پر عمل کرنے والی قوتیں یہ ہیں:- ب پر ایک تناؤ ن پر افقی تناؤ آ سے اور خماؤ کے معیار کے نقشے ب ف گ کا رقبہ۔ نقطہ ب کے گرد معیار لینے سے اس پر کا تناؤ شامل نہیں ہوگا اور

آ سے × صن = ب کے گرد رقبہ ب ف گ کا معیار حاصل ہوگا۔

لیکن یہ رقبہ مثلث ب ہ گ اور مکافی ب ہ ف کا فرق ہے۔

$$\triangle \text{ کا رقبہ} = \frac{۱}{۲} \text{گ ہ} \times \text{ب ہ} = \frac{۱}{۲} \times \frac{لا}{ل} \times \text{ا س} \times لا$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{لا^2}{ل} \times \frac{۳ و ل^2}{۸} = \frac{۳ و لا^2 ل}{۱۶}$$

$\triangle$ کا مرکزِ ہندسی ب سے افقی فاصلہ $\frac{۲ لا}{۳}$ پر ہوگا۔

$$\therefore \triangle \text{ کا معیار ب کے گرد} = \frac{۳ و لا^2 ل}{۱۶} \times \frac{۲ لا}{۳} = \frac{و لا^3 ل}{۸}$$

مکافی کا رقبہ = $\frac{۱}{۳}$ ف ہ × ب ہ

$$= \frac{۱}{۳} \times \frac{\text{و لا}^{۲}}{۲} \times \text{لا} = \frac{\text{و لا}^{۳}}{۶}$$

اِس کا مرکزِ ہندسی ب سے فاصلہ $\frac{۳\,\text{لا}}{۴}$ پر ہوگا

∴ مکافی کا معیار ب۱ کے گرد $= \frac{\text{و لا}^{۳}}{۶} \times \frac{۳\,\text{لا}}{۴}$

$$= \frac{\text{و لا}^{۴}}{۸}$$

∴ ب۱ کے گرد رقبہ ب ف گ کا معیار

$$= \frac{\text{و لا}^{۳}\,\text{ل}}{۸} - \frac{\text{و لا}^{۴}}{۸}$$

$$= \frac{\text{و لا}^{۳}}{۸}(\text{ل} - \text{لا})$$

∴ $\text{آ س} \times \text{صن} = \frac{\text{و لا}^{۳}}{۸}(\text{ل} - \text{لا})$

لا = ۴۲۲ء ل رکھنے سے

$$\text{آ س} \times \text{صن} = \frac{\text{و} \times (۴۲۲\text{ء ل})^{۳} \times ۵۷۸\text{ء ل}}{۸}$$

$$= ۰۰۵۴۳\text{ء و ل}^{۴}$$

∴ $\text{صن} = \frac{۰۰۵۴۳\text{ء و ل}^{۴}}{\text{آ س}}$

ول = مجموعی بوجھ = و رکھنے سے

$$\text{صن} = \frac{۰۰۵۴۳\text{ء و ل}^{۳}}{\text{آ س}}$$

$$= \frac{\text{و ل}^{۳}}{۱۸۴\,\text{آ س}}$$

یکساں لدے ہوئے اور دونوں سروں پر سادہ سہارے کے شہتیر کے لیے

صن = $\frac{5 \text{ و ل}^3}{384 \text{ آ سے}}$ اور یکساں لدے ہوئے اور دونوں سروں پر ثابت شہتیر کے لیے

صن = $\frac{\text{و ل}^3}{384 \text{ آ سے}}$ اس طرح دیکھو زیر غور صورت میں انصراف ان دونوں قیمتوں کے درمیان ہے اور ظاہر ہے کہ یہی ہونا چاہیے۔

یہی طریقہ اُس صورت کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے کہ ایک شہتیر پر جو زیر غور شہتیر کی طرح ثابت ہے ایک منفرد مرکزی بوجھ و ہو۔ اِس صورت میں

اعظم انصراف = $\frac{\text{و ل}^3}{48 \sqrt{5} \text{ آ سے}}$ اور سادہ سہارے ہوئے سرے سے $\frac{\text{ل}}{\sqrt{5}}$ کے فاصلے پر واقع ہوتا ہے۔

انصراف وغیرہ کی عددی مثالیں

(۱) ایک گرڈر کا فصل ۱۲۰ فٹ ہے، اور اس کو $1\frac{1}{4}$ ٹن فی طولی فٹ کا یکساں بوجھ سہارتا ہے۔ مرکز پر گرڈر کی گہرائی کیا ہونی چاہیے کہ اعظم انصراف فصل کے $\frac{1}{1200}$ سے زیادہ نہ ہو؟ کوروں میں اعظم زور $6\frac{1}{2}$ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ نہیں ہونا چاہیے اور سے کی قیمت ۱۲۰۰۰ ٹن فی مربع انچ ہے (بی۔ ایس سی۔ لندن ۱۹۰۷ء)۔

سوال صاف نہیں کیونکہ اگر گہرائی سارے طول میں یکساں نہیں تو جب تک اس کی تبدیلی کا طور نہ معلوم ہو انصراف محسوب نہیں ہو سکتا۔

ہم گہرائی کو مستقل مان لینگے:

مرکز پر مر = $\frac{\text{و ل}}{8} = \frac{120 \times 120 \times 1\frac{1}{4}}{8}$ فٹ ٹن

= ۲۷۰۰۰ انچ ٹن

∴ اگر اعظم زور = $6\frac{1}{2}$ ٹن فی مربع انچ

تو چونکہ $ز = \frac{م}{مق}$

∴ $مق = \frac{م}{ز} = \frac{27000}{6\frac{1}{2}}$ انچ اکائیاں

اب $صہ = \frac{5 \, و \, ل^3}{384 \, آ \, ے}$

اور $صہ = \frac{ل}{1200} = \frac{1}{10}$ فٹ

∴ $\frac{12}{10} = \frac{120 \times 120 \times 120 \times 150 \times 5}{آ \times 12000 \times 384} \times 1.28$

∴ $آ = 4.5000$ انچ اکائیاں

لیکن $\frac{آ}{مق} = \frac{گ}{2}$ جہاں گ = گہرائی

∴ $گ = \frac{2 آ}{مق} = \frac{6.5 \times 4.5000 \times 2}{27000}$ انچ

$= \frac{6.5 \times 30}{12} = 16.25$ فٹ

عملاً ٹھوس پیٹے کے گرڈر میں اتنی بڑی گہرائی نہیں اختیار کی جاتی۔

(۲) ایک ڈھلے لوہے کا پانی کا نل جس کا بیرونی قطر ۱۰ انچ اور موٹائی $\frac{1}{2}$ انچ ہے دو سہاروں پر ٹکا ہوا ہے جن کا باہمی فاصلہ ۴۰ فٹ ہے۔ نل کے خالی اور بھرے ہونے کی صورت میں نل میں اعظم زور اور انصراف معلوم کرو (اے۔ ایم۔ آئی۔ سی۔ ای فروری سنہ ۱۹۰۶ء)۔

اس صورت میں $آ = \frac{\pi(ق^{4} - ق_{1}^{4})}{64} = \frac{\pi(10^{4} - 9^{4})}{64}$

= ۱۶۸ء۸ انچ اکائیاں

∴ $مق = \frac{آ}{\frac{ق}{2}} = \frac{168.8}{5}$ = ۳۳ء۷۶ انچ اکائیاں

نل کا حجم $= \frac{\pi}{4}(100 - 81) \times \frac{40}{144}$ = ۴ء۱۴ مکعب فٹ

پانی کا حجم $= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{81}{144} \times 40$ = ۱۷ء۶۷ مکعب فٹ

∴ نل کا وزن = $و = \frac{450 \times 4.14}{2240}$ = ۸۳۲ء ٹن

پانی کا وزن = $و_{1} = \frac{62.5 \times 17.67}{2240}$ = ۴۹۲ء ٹن

∴ $و = و + و_{1}$ = ۱ء۳۲۴ ٹن (تقریباً)

∴ خالی کی صورت میں اعظم زور $= \frac{م}{مق} = \frac{12 \times 40 \times .832}{33.76 \times 8}$

= ۱ء۴۸ ٹن فی مربع انچ

بھرے ہونے کی صورت میں اعظم زور $= \frac{1.324 \times 1.48}{.832}$ = ۲ء۳۵ ٹن فی مربع انچ

ے = ۸۰۰۰ ٹن فی مربع انچ لینے سے

خالی کی صورت میں $صہ = \frac{5\, و\, ل^{3}}{384\, ے\, آ}$

$= \frac{12 \times 12 \times 12 \times 40 \times 40 \times 40 \times .832 \times 5}{8000 \times 168.8 \times 384}$

= ۸۹ء انچ

بھرے ہونے کی صورت میں صہ = $\frac{۱٫۳۲۴ \times ۰٫۸۹}{۰٫۸۳۲}$ = ۱٫۴۱ انچ

(۳) ایک ڈنڈا جو نرم فولاد کے نل کا بنا ہوا ہے اور جس کا قطر ۶ انچ اور موٹائی $\frac{۱}{۲}$ ۱ انچ ہے زمین میں مضبوط گڑا ہوا ہے، اور اس کی چوٹی زمین سے ۱۰ فٹ اونچی ہے۔ ۲۰۰۰ پونڈ کی ایک افقی کھینچ زمین سے ۶ فٹ کے فاصلہ پر لگائی جاتی ہے۔ چوٹی پر انصراف معلوم کرو۔ ے = ۱۳۵۰۰ ٹن فی مربع انچ۔ (بی۔ ایس سی۔ لندن ۱۹۰۳ء)۔

اس صورت میں آ = $\frac{\pi\ (ق^۴ - قَ^۴)}{۶۴} = \frac{\pi\ (۶^۴ - ۵^۴)}{۶۴}$

= ۳۲٫۹ انچ اکائیاں

یہ مثال بالکل صورت (۲) کی ہے

$\therefore$ صہ = $\frac{و\ لَ^۲}{۲\ آ\ ے}\ (ل - \frac{لَ}{۳})$

موجودہ صورت میں لَ = ۶ فٹ، ل = ۱۰ فٹ

و = ۲۰۰۰ پونڈ = $\frac{۲۰۰۰}{۲۲۴۰}$ ٹن

$\therefore$ صہ = $\frac{۲۰۰۰}{۲۲۴۰} \times \frac{۱۲ \times ۸ \times ۱۲ \times ۱۲ \times ۶ \times ۶}{۲ \times ۳۲٫۹ \times ۱۳۵۰۰}$

= ۰٫۵ انچ تقریباً

(۴) ایک فولادی سلاخ ۴ انچ چوڑی اور $\frac{۳}{۸}$ انچ موٹی ہے۔ اس کو کس اندرونی نصف قطر کی حد تک موڑا جا سکتا ہے بغیر اس کے کہ اعظم زور ۸ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ ہو۔ ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ۔ (اے۔ ایم۔ آئی۔ سی۔ ای ۱۹۰۷ء)۔

خماؤ کا عام ضابطہ یہ ہے :-

$$\frac{ز}{ق} = \frac{م}{آ} = \frac{ے}{ر}$$

$$\therefore \quad \frac{ز}{ق} = \frac{ے}{ر}$$

$$یا \quad ر = \frac{ق ے}{ز}$$

موجودہ صورت میں ق = تعدیلی محور سے انتہائی ریشے کا فاصلہ

$$= \frac{۳}{۱۶} \text{ انچ}$$

$$\therefore \quad ر = \frac{۳}{۱۶} \times \frac{۱۳۰۰۰}{۵}$$

$$= ۴۸۸ \text{ انچ}$$

$$= ۴۰.۶۷ \text{ فٹ}$$

دیکھو اس سوال میں سلاخ کی چوڑائی کی ضرورت نہیں۔
جواب جو حاصل ہوا ہے وہ مرکزی خط کا نصف قطر ہے۔

(۵) ایک ڈھلے لوہے کے شہتیر کی تراش مستطیلی ہے۔ موٹائی ۱۱ انچ اور گہرائی ۲ انچ ہے۔ یہ معلوم ہوا ہے کہ اگر ۳۶ انچ کے فصل کے وسط میں ۱۰ ہنڈرڈ ویٹ کا بوجھ رکھا جائے تو اس سے ۱۱، انچ کا انحراف پیدا ہوتا ہے۔ ۳۰، انچ کا انحراف پیدا کرنے کے لیے ½ ہنڈرڈ ویٹ کے بوجھ کو اسی فصل کے وسط میں کتنی بلندی سے گرانا ہوگا۔ (بی۔ایس سی۔ لندن ۱۹۰۷ء)

۱۱، انچ انحراف پیدا کرنے کے لیے ۱۰ ہنڈرڈ ویٹ کی ضرورت ہوتی ہے۔

∴ ۳۰ء انچ انصراف پیدا کرنے کے لیے $\frac{.30\times 10}{.11}$ ہنڈرڈ ویٹ کی ضرورت ہوگی۔

مرکز پر لدی ہوئی سلاخ کے انصراف میں کام $= \frac{1}{2}$ و صہ

∴ ۳۰ء انچ انصراف میں کام $= \frac{1}{2} \times \frac{.30\times 10}{.11} \times .30$ انچ ہنڈرڈ ویٹ

$= .341$ فٹ ہنڈرڈ ویٹ

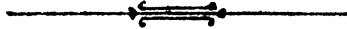
اگر $\frac{1}{2}$ ہنڈرڈ ویٹ کو بلندی ھ سے گرانا پڑے تو اس کا کیا ہوا کام $= \frac{1}{2}\left(\text{ھ} + \frac{.30}{12}\right)$ فٹ ہنڈرڈ ویٹ، کیونکہ بلندی ھ شہتیر کے اصلی غیر منصرف محل سے ہے۔

کام کی یہ دونوں مقداریں مساوی ہونی چاہییں

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\left(\text{ھ} + \frac{.30}{12}\right) = .341$$

$$\text{ھ} = .682 - \frac{.30}{12} \text{ فٹ}$$

$$= 8.18 - .30 \text{ انچ}$$

$$= 7.88 \text{ انچ}$$

نواں باب

ثابت اور مسلسل شہتیر

اگر کسی شہتیر کے سرے ایک خاص سمت میں اس طرح ثابت کیے گئے ہوں کہ اُن میں وہ میلان نہ پیدا ہوسکے جو آزاد خماؤ سے پیدا ہوتا یا اگر کوئی شہتیر دو سے زیادہ سہاروں پر ٹکا ہوا ہو تو خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے سادہ سہارے ہوئے شہتیروں سے جن سے ہم نے اب تک بحث کی ہے مختلف ہونگے۔

اول الذکر صورت میں شہتیر کو ثابت یا دربستہ یا نصب شدہ کہا جاتا ہے، اور دوسری صورت میں اس کو مسلسل شہتیر کہا جاتا ہے۔

ہم اب اس سے بحث کرینگے کہ ایسے شہتیروں کے لیے جز اور خماؤ کے معیار کے نقشے کس طرح معلوم کیے جاسکتے ہیں اور سادہ سہارے ہوئے شہتیروں کے مقابلے میں ان کے فوائد اور نقصانات دکھاینگے۔

ثابت شہتیر

اگر ایک شہتیر کے سرے افقی سمت میں ثابت ہوں تو شہتیر خمیدگی کے بعد ا ب ج جیسی وضع اختیار کریگا (شکل ۹۴)۔ اگر سرے آزاد ہوتے تو

یہ نقطہ دار وضع آَ بَ جَ اختیار کرتا، اور اس کو وضع ا ب ج میں لانے کے لیے

شکل ۹۴ - ثابت شہتیر

منفی خماؤ کے معیار لگانے پڑتے جن کو نقشے کے ذریعے دکھایا گیا ہے کہ قوتوں ق، ق سے پیدا ہوتے ہیں۔ اِس طرح شہتیر کے سروں پر منفی خماؤ کے معیار عمل کرینگے کیونکہ ان سے جو انحنا پیدا ہوتا ہے وہ بوجھ سے پیدا ہونے والے انحنا کی مخالف سمت میں ہے۔ خماؤ کے معیار کی اِس علامت کی تبدیلی کا مطلب یہ ہے کہ شہتیر کے تنشی اور فشاری پہلو مقلوب ہو جائینگے۔ ہم ثابت شہتیروں کے مسائل سے ترسیمی اور ریاضیاتی دونوں طرح سے بحث کرینگے جیسا کہ شہتیروں کے انصراف کی صورت میں کیا گیا تھا۔

ترسیمی بحث

مور (Mohr) کے مسئلے کی رُو سے کسی شہتیر کی منصرف وضع وہی ہوگی جو اسی کے فصل کی ایک خیالی طناب کی ہوتی جس پر لداؤ شہتیر کے خماؤ کے معیار کے منحنی کے مطابق ہو اور جس میں افقی تناؤ خماؤ کی استواری (آ × م) کے مساوی ہو۔ اگر ایک شہتیر کے سرے افقی سمت میں ثابت ہوں تو لچک کے خط کو تعبیر کرنے والے ریسمانی کثیر الاضلاع کا پہلا اور آخری ضلع متوازی ہو سکے۔ اس کے معنے یہ ہونگے کہ سمتی خط پر جو خماؤ کے معیار کے منحنی کے رقبوں کے حصے تعبیر کیے گئے اُس پر پہلا اور آخری نقطہ ایک دوسرے پر منطبق ہوں اور اس کے معنے

یہ ہونگے کہ خماؤ کے معیار کے منحنی کا مجموعی رقبہ صفر ہوگا۔ اس کی مدد سے ہم ذیل کا قاعدہ قائم کرسکتے ہیں:-

اگر ایک شہتیر کے سہارے اُفقی سمت میں ایک ہی لیول پر ثابت ہوں، اور شہتیر کی تراش سارے طول میں مستقل ہو تو مثبتی خماؤ کے معیار پیدا ہونگے اور منفی خماؤ کے معیار کے نقشے کا رقبہ اُس کے مساوی ہوگا جو اس بوجھ سے آزاد سہارے ہوئے شہتیر کی صورت میں ہوتا۔

ہم منفی خماؤ کے معیار کے نقشے کو "سروں کا نقشہ" اور آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے نقشے کو "آزاد نقشہ" کہینگے۔

اب مسئلہ دو صورتوں میں بٹ جاتا ہے: (ا) جس میں لداؤ متشاکل ہو (ب) جس میں لداؤ بے قاعدہ یا غیر متشاکل ہو۔

متشاکل لداؤ ـــــ اگر لداؤ متشاکل ہو تو شہتیر دونوں طرف سے ایک جیسا ہوگا اور اس طرح سروں کے خماؤ کے معیار مساوی ہونگے، اور ان کی قیمت اِس طرح حاصل ہوسکیگی کہ آزاد نقشے کے رقبے کو فصل سے تقسیم کریں۔ ذیل کی صورتوں پر غور کرنے سے یہ زیادہ واضح ہوجائیگا:-

(۱) ثابت شہتیر پر یکساں بوجھ ـــــ فرض کرو کہ طول ل کے فصل ا ب (شکل ۹۵) پر حدت ب کا ایک یکساں بوجھ چھایا ہوا ہے۔ آزاد نقشہ اس صورت میں مکافی ا ج ب ہوگا جس کا اعظم معین $\frac{ب ل^2}{8}$ ہوگا۔ اور چونکہ مکافی کا رقبہ حائط مستطیل کا دو تہائی ہوتا ہے اِس لیے

$$\text{آزاد نقشے کا رقبہ} = \frac{2}{3} ل \times \frac{ب ل^2}{8} = \frac{ب ل^3}{12}$$

$$\therefore \text{سروں کے خماؤ کا معیار} = \frac{ب ل^3}{12} \div ل = \frac{ب ل^2}{12}$$

اس لیے اگر ا ع اور ب ف = $\frac{ب ل^2}{12}$ قایم کیے جائیں تو ع ف کو ملانے سے سروں کا نقشہ حاصل ہوگا اور حاصل نقشہ اس کا اور مکافی کا فرق ہوگا جو کہ سایہ دار دکھایا گیا ہے۔ نقاط گ اور ہ پر خماؤ کا معیار صفر ہے اور یہ نقاط نقاطِ انعطاف کہلاتے ہیں کیونکہ اِن نقاط پر لچک کے خط کا انحنا علامت بدلتا ہے۔

شکل ۹۵۔ ثابت شہتیر پر یکساں بوجھ

فرض کرو کہ نقطہ گ شہتیر کے مرکز سے فاصلہ لا پر ہے، تب چونکہ مکافی کا معین اِس نقطے پر $\frac{ب ل^2}{12}$ ہے اِس لیے

$$\frac{ب}{۲}\left(\frac{ل^2}{۴} - لا^2\right) = \frac{ب ل^2}{۱۲}$$

contraflexure

یا $\frac{\text{ب لا}^{۲}}{۲} = \frac{\text{ب ل}^{۲}}{۲۴}$

یا $\text{لا}^{۲} = \frac{\text{ل}^{۲}}{۱۲}$

یا $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{۲\sqrt{۳}}$

$\therefore$ گ کا فاصلہ ع سے $= \frac{\text{ل}}{۲} - \text{لا} = \frac{\text{ل}}{۲} - \frac{\text{ل}}{۲\sqrt{۳}}$

$= \frac{\text{ل}}{۲} \cdot \frac{\sqrt{۳} - ۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\text{ل}}{۶}(۳ - \sqrt{۳})$

$= ۰٫۲۱۱\ \text{ل}$

جھکاؤ کا نقشہ —— تشاکل لداؤ کی صورت میں جھکاؤ کا نقشہ بالکل سادہ سہارے ہوئے شہتیر کی طرح ہوگا کیونکہ کسی نقطے پر جھکاؤ اس نقطے پر خماؤ کے معیار کے منحنی کے ڈھال کے مساوی ہوتا ہے اور تشاکل لداؤ کی صورت میں ثابت شہتیر کے خماؤ کے معیار کے نقشے میں صرف یہ ہوتا ہے کہ اساسی خط انتصابی اوپر کو اٹھ جاتا ہے ڈھال میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

انصراف —— مرکز پر کا انصراف حسب سابق اس طرح معلوم ہو سکتا ہے کہ خیالی رسی ا، ب، کے توازن پر غور کریں۔

بائیں نصف رسی کے توازن پر غور کرنے سے اور ا، کے گرد معیار لینے سے

$\text{آے} \times \text{صہ} = \text{ب م}_{۱} - \text{ب م}_{۲}$

$= \text{ب}\ (\text{م}_{۱} - \text{م}_{۲})$

موجودہ صورت میں ب = آزاد نقشے کے نصف کا رقبہ

$= \frac{۲}{۳} \times \frac{\text{ل}}{۲} \times \frac{\text{ب ل}^{۲}}{۸} = \frac{\text{ب ل}^{۳}}{۲۴}$

$$م_1 = \frac{۵ ل}{۱۶}$$

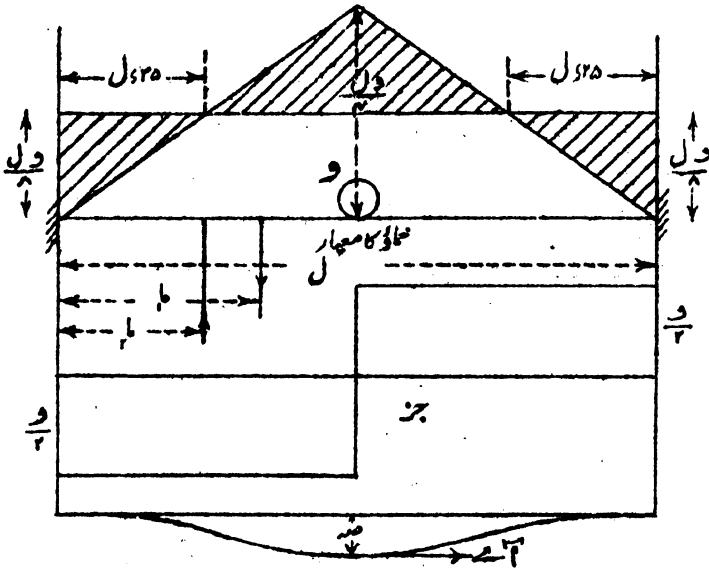
$$م_2 = \frac{ل}{۴}$$

$$\therefore \quad آسے \times صہ = \frac{ب ل^3}{۲۴}\left(\frac{۵ ل}{۱۶} - \frac{ل}{۴}\right) = \frac{ب ل^4}{۳۸۴}$$

$$\therefore \quad صہ = \frac{ب ل^4}{۳۸۴ \; آسے} = \frac{و ل^3}{۳۸۴ \; آسے}$$

دیکھو یہ اُسی لداؤ کے آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے انحراف کا پانچواں حصہ ہے۔

(۲) ثابت شہتیر پر منفرد مرکزی بوجھ ——— اِس صورت میں آزاد نقشے کا رقبہ $= \frac{1}{2} ل \times \frac{و ل}{۴} = \frac{و ل^2}{۸}$

$$\therefore \quad سروں کے خماؤ کا معیار = \frac{و ل^2}{۸} \div ل = \frac{و ل}{۸}$$

شکل ۹۶۔ ثابت شہتیر پر مرکزی بوجھ

خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے شکل ۹۶ میں دکھائے گئے ہیں۔ نقاطِ انعطاف فصل کے $\frac{1}{4}$ اور $\frac{3}{4}$ پر ہیں۔

انصراف ——— گزشتہ صورت کی طرح

$$\text{آ} \text{ے} \times \text{صہ} = \text{ب} \, (\text{م}_1 - \text{م}_2)$$

موجودہ صورت میں

$$\text{ب} = \frac{\text{و ل}}{8} \times \frac{\text{ل}}{2} = \frac{\text{و ل}^2}{16}$$

$$\text{م}_1 = \frac{\text{ل}}{3}$$

$$\text{م}_2 = \frac{\text{ل}}{4}$$

$$\therefore \quad \text{آ} \text{ے} \times \text{صہ} = \frac{\text{و ل}^2}{16}\left(\frac{\text{ل}}{3} - \frac{\text{ل}}{4}\right) = \frac{\text{و ل}^3}{192}$$

$$\therefore \quad \text{صہ} = \frac{\text{و ل}^3}{192 \, \text{آ} \text{ے}}$$

یہ اُسی لداؤ کے آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے انصراف کا چوتھائی حصہ ہے۔

غیر متشاکل لداؤ ——— اِس صورت میں سروں کے معیار مساوی نہیں ہونگے اور اس شرط کے علاوہ کہ سروں کے نقشے اور آزاد نقشے کے رقبے مساوی ہوں اِس صورت میں یہ شرط بھی ہے کہ اِن رقبوں کے ہندسی مرکز ایک ہی انتصابی خط میں واقع ہونے چاہییں۔

اِس کا ثبوت حسب ذیل ہے :— خیالی رسی پر غور کریں اور ایک سرے کے گرد معیار لیں تو چونکہ دوسرے سرے پر کا تناؤ بھی اس نقطے میں سے گزرتا ہے اس لیے اس کا معیار صفر ہوگا، اور اِس طرح اس نقطے کے گرد خماؤ کے معیار کے نقشوں کا معیار صفر ہوگا۔ لیکن چونکہ ان نقشوں کے رقبے مساوی ہیں اِس لیے

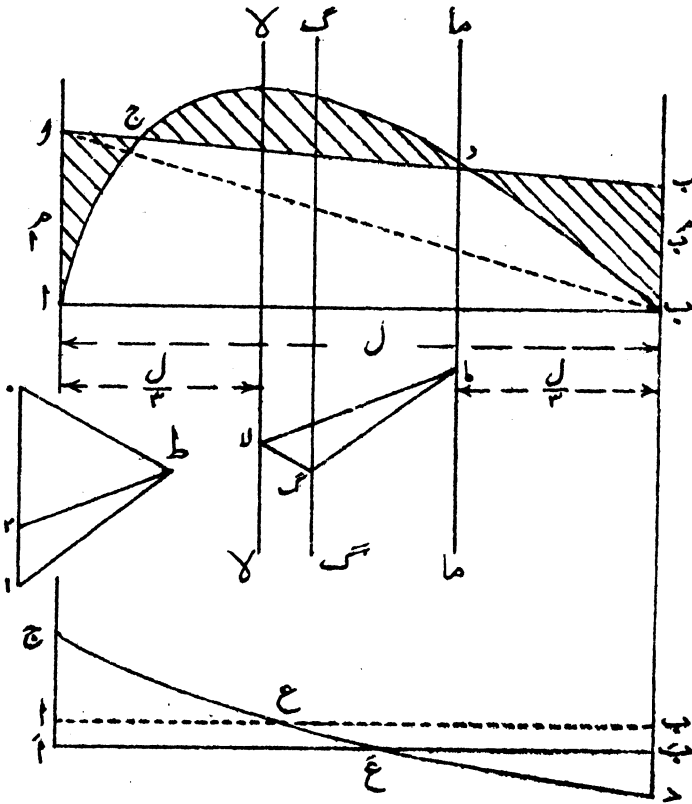
contraflexure

ان کے مرکزِ ہندسی اس نقطے سے مساوی فاصلے پر ہونے چاہییں۔
فرض کرو کہ ایک فصل ا ب (شکل ۹ء۶) پر جس کا طول ل ہے بوجھ کا کوئی بے قاعدہ نظام ہے جس سے خماؤ کے میعار کا آزاد نقشہ ا ج د ب پیدا ہوتا ہے اور فرض کرو کہ اِس نقشے کا مرکزِ ہندسی انتصابی خط گ گ پر واقع ہوتا ہے فرض کرو کہ سروں کے خماؤ کے میعار م‌ا اور م‌ب ہیں، اور ا ا اور ب ب ان کے مساوی قایم کیے گئے ہیں۔ تب منحرف ا ا ب ب سرے کا نقشہ ہوگا، اور اب جو شرطیں پوری ہونی ہیں وہ یہ ہیں کہ منحرف کا رقبہ منحنی ا ج د ب کے رقبے کے مساوی ہو اور یہ کہ اس کا مرکزِ ہندسی خط گ گ پر واقع ہو۔ ا ب کو ملاکر منحرف کو دو مثلثوں میں تقسیم کرو، اور ا ا اور ب سے ل/۳ کے فاصلہ پر انتصابی خطوط لا لا اور ما ما کھینچو۔ مثلثوں ا ا ب اور ب ا ب کے مرکزِ ہندسی علی الترتیب خطوط لا لا اور ما ما پر واقع ہونگے اور اب مسئلہ یہ ہوجاتا ہے کہ منحنی ا ج د ب کے مجموعی رقبے کو (جسے ہم ر سے تعبیر کرینگے) دو رقبوں میں تقسیم کیا جائے جو خطوط لا لا اور ما ما میں عمل کریں۔ یہ اِس طرح ہوسکتا ہے کہ رقبوں کو انتصابی قوتیں مان کر ایک سمتی خط ۰، ۱ کھینچا جائے جو رقبہ ر کو تعبیر کرے۔ کوئی موزوں قطب ط لے کر ۰، ط اور ۱، ط کو ملاؤ اور انتصابی خطوط لا لا، گ گ، اور ما ما کو قطع کرتے ہوئے خطوط (۰، ط) اور (۱، ط) کے متوازی خطوط لا گ اور گ ما کھینچو اور لا، ما کو ملاؤ۔ تب لا ما کے متوازی ط ۲ کو کھینچا جائے تو ۱، ۲ سے وہ رقبہ حاصل ہوگا جو خط ما ما میں عمل کرنا چاہیے اور ۲، ۰ سے وہ رقبہ جو لا لا میں عمل کرنا چاہیے۔

تب م‌ا × ل/۲ = مثلث ا ا ب کا رقبہ = (۲، ۰)

∴ م‌ا = ۲ × (۰، ۲) / ل

اسی طرح م‌ب = ۲ × (۲، ۱) / ل

اِس کی مدد سے خماؤ کے میعار کا نقشہ کھینچا جاسکتا ہے۔

شکل ۹۰
ثابت شہتیروں کی عام صورت

جز کا نقشہ ـــــ اِس صورت میں چونکہ سروں کے خماؤ کے معیار مساوی نہیں اِس لیے جز کا نقشہ وہ نہیں ہوگا جو آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے ہوتا بلکہ اساسی خط ہٹا ہوا ہوگا۔ اور چونکہ کسی نقطے پر جز خماؤ کے معیار کے منحنی کا ڈھال ہے اس لیے جز کے منحنی کا اساسی خط بقدر (ما − مب)/ل کے نیچے ہٹ جائیگا کیونکہ آزادانہ سہارے ہوئے اور ثابت شہتیر کے

اساسی خطوں کے ڈھالوں کا فرق یہی ہے۔ اگر شکل میں ا ج ع د ب آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کا جزی نقشہ اسی لداؤ کے ساتھ ہو تو سروں کو نصب کرنے کا اثر یہ ہوگا کہ اساسی خط بقدر ا اَ = ب بَ = $\frac{م_۲ - م_۱}{ل}$ کے نیچے اُتر آئیگا اور اِس طرح نقشہ اَ ج عَ د بَ حاصل ہوگا۔

خاص صورت ــــ ثابت شہتیر پر ہموار طور پر بڑھتا ہوا بوجھ۔

فرض کرو کہ فصل ل کے ایک شہتیر ا ب پر ایک بوجھ ہے جس کی حدت ایک سرے سے دوسرے سرے کی طرف ہموار طور پر بڑھتی ہے، اور ب سے اکائی فاصلے پر حدت ب ٹن فی طولی فٹ ہے، اور مجموعی بوجھ و ٹن ہے۔ تب جیسا کہ صفحہ ۱۵۹ پر دکھایا گیا ہے آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے

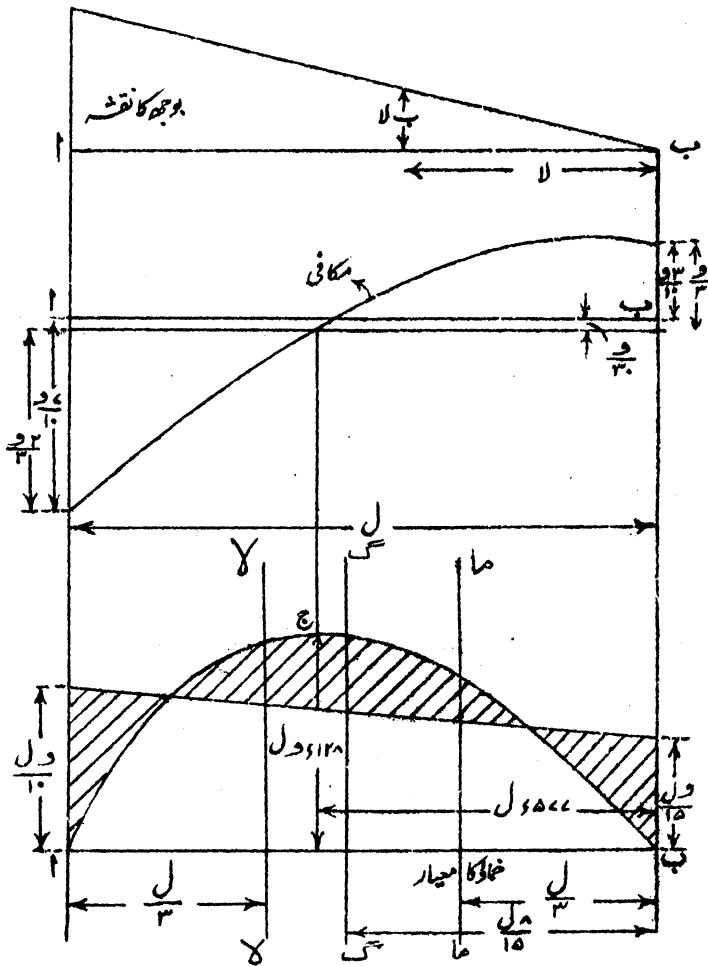
$س_ب = \frac{و}{۳}$، $س_ا = \frac{۲و}{۳}$، اور آزاد خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک تیسرے رُتبہ کا مکافی ہوگا، اور اعظم خماؤ کا معیار ۱۲۸ء و ل ہوگا اور ب سے فاصلہ ۵۷۷ء ل پر واقع ہوگا۔ اِس آزاد نقشے کا رقبہ $\frac{و ل^۲}{۱۲}$ ہوگا اور اِس کے مرکز ہندسی کا فاصلہ ب سے $\frac{۸ ل}{۱۵}$ ہوگا۔

اس کو ریاضیاتی طور پر یوں ثابت کیا جاسکتا ہے :۔

$$\text{خماؤ کے معیار کے منحنی کا رقبہ} = \int_۰^ل م \, فر لا$$

$$= \int_۰^ل \left(\frac{ب ل^۲ لا}{۶} - \frac{ب لا^۳}{۶}\right) فر لا$$

$$= \left[\frac{ب ل^۲ لا^۲}{۱۲} - \frac{ب لا^۴}{۲۴} + ج\right]_۰^ل$$

رقبہ = ۰ جب کہ لا = ۰ اس لیے ج = ۰

شکل ۹۸۔ ثابت شہتیر پہ یکساں بڑھتا ہوا بوجھ

اس رقبے کا پہلا معیار ب میں کے انتصابی خط کے گرد $= \int_{\cdot}^{ل} م\, لا\, ف لا$

$$= \int_{\cdot}^{ل} \left(\frac{ب\, ل^{۲}\, لا^{۲}}{۶} - \frac{ب\, لا^{۴}}{۶} \right) ف لا$$

$$= \left[\frac{\text{ب ل}^{2}\,\text{لا}^{3}}{۱۸} - \frac{\text{ب لا}^{5}}{۳۰} + \text{ج}_{1} \right]_{0}^{\text{ل}}$$

لیکن معیار = ۰ جب کہ لا = ۰ اس لیے $\text{ج}_{1} = 0$

$$\therefore \text{پہلا معیار} = \frac{\text{ب ل}^{5}}{۱۸} - \frac{\text{ب ل}^{5}}{۳۰} = \frac{\text{ب ل}^{5}}{۴۵}$$

$$\therefore \text{مرکزِ ہندسی کا فاصلہ ب میں کے انتصابی خط سے} = \frac{\text{پہلا معیار}}{\text{رقبہ}}$$

$$= \frac{\text{ب ل}^{5}}{۴۵} \div \frac{\text{ب ل}^{4}}{۲۴}$$

$$= \frac{۲۴\,\text{ل}}{۴۵} = \frac{۸\,\text{ل}}{۱۵}$$

اس سے خط گ گ کا تعین ہوتا ہے۔ خطوط لا لا اور ما ما میں عمل کرنے والے رقبے $\frac{\text{و ل}^{2}}{۲۰}$ اور $\frac{\text{و ل}^{2}}{۳۰}$ ہونے چاہییں کیونکہ مجموعی رقبہ $\frac{\text{و ل}^{2}}{۱۲}$ خط ما ما سے فاصلہ $\frac{۳\,\text{ل}}{۱۵}$ پر عمل کرتا ہے۔

∴ ما ما کے گرد معیار لینے سے

$$\text{لا لا میں عمل کرنے والا رقبہ} \times \frac{\text{ل}}{۳} = \frac{\text{و ل}^{2}}{۱۲} \times \frac{۳\,\text{ل}}{۱۵}$$

$$\therefore \text{لا لا میں عمل کرنے والا رقبہ} = \frac{\text{و ل}^{3}}{۶۰} \div \frac{\text{ل}}{۳} = \frac{\text{و ل}^{2}}{۲۰}$$

$$\therefore \text{م}_{\text{ا}} = \frac{\text{و ل}^{2}}{۲۰} \times \frac{۲}{\text{ل}} = \frac{\text{و ل}}{۱۰}$$

$$\therefore \text{م}_{\text{ب}} = \frac{\text{و ل}^{2}}{۳۰} \times \frac{۲}{\text{ل}} = \frac{\text{و ل}}{۱۵}$$

اِس طرح حاصل خماؤ کے معیار کا نقشہ وہ ہوگا جو شکل ۹۵ میں سایہ دار

دکھایا گیا ہے۔

جز کے لیے اساسی خط کا ہٹاؤ = ($\frac{\text{و ل}}{10}$ - $\frac{\text{و ل}}{15}$) ÷ ل = $\frac{\text{و}}{30}$

اِس طرح سروں پر جز علی الترتیب $\frac{\text{و}}{1.5}$ اور $\frac{3\text{و}}{10}$ ہونگے اور ثابت شہتیر کا جزی نقشہ وہ ہوگا جو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

خط گ گ معلوم کرنے کا ترسیمی طریقہ ــــــ اگر لداؤ

اِس طرح کا ہو کہ خط گ گ کا محل آسانی سے محسوب نہ ہو سکے تو حسب ذیل عمل کیا جا سکتا ہے:۔ آزاد خماؤ کے میعار کے نقشے اج ب کو متعدد انتصابی پٹیوں میں تقسیم کرو جن کا مساوی ہونا ضروری نہیں اور اِن پٹیوں کے مرکزوں میں سے انتصابی خطوطِ قوت کھینچو۔ اور ان کو ایک سمتی خط پر قایم کرو اور کوئی قطب لے کر ریسمانی کثیر الاضلاع کھینچو۔ پہلا اور آخری ضلع جہاں ملینگے وہ گ گ پر کا ایک نقطہ ہوگا۔ یہ وہی طریقہ ہے جو مور (Mohr) کے طریقے میں کسی شکل کا مرکز ہندسی معلوم کرنے کے لیے اختیار کیا گیا (باب ۳)۔ خماؤ کے میعار کے نقشے کا رقبہ "جمع منحنی" کے طریقے سے معلوم کیا جا سکتا ہے اور مسئلے کو اِس طرح پورا کیا جا سکتا ہے جس طرح شکل ۹۷ کے متعلق بیان کیا گیا ہے۔

ریاضیاتی بحث

جیسا کہ پہلے دکھایا گیا ہے:

شہتیر کا ڈھال = $\int \frac{\text{م}}{\text{آ ے}}$ فر لا

اگر شہتیر کا سرا دربستہ ہو تو یہ ڈھال دونوں سروں پر صفر ہونا چاہیے۔

ذیل کی خاص صورتوں پر غور کرو:۔

ثابت شہتیر پر یکساں بوجھ ــــــ بوجھ کی حدت ب اجد

مبدا ر مرکز پر لے کر مرکز سے فاصلہ لا پر ایک نقطہ پر غور کریں تو آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے

$$\text{م}_{\text{لا}} = \frac{\text{ب}}{۲}\left(\frac{\text{ل}^{۲}}{۴} - \text{لا}^{۲}\right)$$ (دیکھو صفحہ ۲۷۵)

فرض کرو کہ درستگی کی وجہ سے سرے کے خماؤ کا معیار $\text{م}_{۱}$ پیدا ہوتا ہے۔

تب ثابت شہتیر کے لیے $\text{م}_{\text{لا}} = \frac{\text{ب}}{۲}\left(\frac{\text{ل}^{۲}}{۴} - \text{لا}^{۲}\right) - \text{م}_{۱}$

$$\therefore \text{ڈھال} = \int \frac{\text{م}}{\text{آے}}\, \text{فرلا}$$

$$= \frac{۱}{\text{آے}}\left(\frac{\text{ب}\,\text{ل}^{۲}\,\text{لا}}{۸} - \frac{\text{ب}\,\text{لا}^{۳}}{۶} - \text{م}_{۱}\,\text{لا} + \text{ج}\right)$$

ڈھال = ۰ جب کہ لا = ۰ $\therefore$ ج = ۰

نیز ڈھال = ۰ جب کہ لا = $\frac{\text{ل}}{۲}$

$$\therefore \frac{\text{ب}\,\text{ل}^{۳}}{۱۶} - \frac{\text{ب}\,\text{ل}^{۳}}{۴۸} - \text{م}_{۱}\frac{\text{ل}}{۲} = ۰$$

یعنی $$\text{م}_{۱} \times \frac{\text{ل}}{۲} = \frac{\text{ب}\,\text{ل}^{۳}}{۱۶} - \frac{\text{ب}\,\text{ل}^{۳}}{۴۸} = \frac{\text{ب}\,\text{ل}^{۳}}{۲۴}$$

$$\therefore \text{م}_{۱} = \frac{\text{ب}\,\text{ل}^{۲}}{۱۲}$$

انصراف معلوم کرنے کے لیے پھر تکمل کرنے سے

$$\text{انصراف} = \iint \frac{\text{م}}{\text{آے}}\, \text{فرلا}\, \text{فرلا}$$

$$= \frac{۱}{\text{آے}}\left(\frac{\text{ب}\,\text{ل}^{۲}\,\text{لا}^{۲}}{۱۶} - \frac{\text{ب}\,\text{لا}^{۴}}{۲۴} - \frac{\text{م}_{۱}\,\text{لا}^{۲}}{۲} + \text{ج}_{۱}\right)$$

$$= \frac{1}{\text{آ ے}}\left(\frac{\text{ب ل}^2\,\text{لا}^2}{16} - \frac{\text{ب لا}^4}{24} - \frac{\text{ب ل}^2\,\text{لا}^2}{24} + \text{ج}_1\right)$$

$$= \frac{1}{\text{آ ے}}\left(\frac{\text{ب ل}^2\,\text{لا}^2}{48} - \frac{\text{ب لا}^4}{24} + \text{ج}_1\right)$$

یہ صفر ہے جب کہ $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{2}$

$$\therefore \quad \frac{\text{ب ل}^4}{192} - \frac{\text{ب ل}^4}{384} + \text{ج}_1 = 0$$

یا $$\text{ج}_1 = \frac{-\text{ب ل}^4}{384}$$

$\therefore$ جب $\text{لا} = 0$ تو انصراف $= \frac{\text{ج}_1}{\text{آ ے}} = \frac{-\text{ب ل}^4}{384\,\text{آ ے}}$

$\therefore$ اعظم انصراف $= \frac{\text{ب ل}^4}{384\,\text{آ ے}} = \frac{\text{و ل}^3}{384\,\text{آ ے}}$

خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے شکل ۹۵ کے مطابق ہونگے۔

(۲) ثابت شہتیر پر منفرد مرکزی بوجھ — حسب سابق فصل ل، اور مبداء مرکز پر، اور بوجھ و لینے سے آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے

$$\text{م}_{\text{لا}} = \frac{\text{و}}{2}\left(\frac{\text{ل}}{2} - \text{لا}\right)$$

$\therefore$ اگر سروں کے ثابت ہونے کی وجہ سے سروں کا خماؤ کا معیار م_1 ہو تو ثابت شہتیر کے لیے

$$\text{م}_{\text{لا}} = \frac{\text{و}}{2}\left(\frac{\text{ل}}{2} - \text{لا}\right) - \text{م}_1$$

$\therefore$ شہتیر کا ڈھال $= \int \frac{\text{م}}{\text{آ ے}}\,\text{فرلا}$

$$= \left(\frac{و ل لا}{۴} - \frac{و لا^{۲}}{۴} - م_{۱} لا + ج_{۲}\right) \times \frac{۱}{آ ے}$$

جب لا = ۰ تو ڈھال = ۰ ∴ $ج_{۲} = ۰$

جب لا = $\frac{ل}{۲}$ تو بھی ڈھال = ۰

اس لیے $\left(\frac{و ل^{۲}}{۸} - \frac{و ل^{۲}}{۱۶} - م_{۱} \frac{ل}{۲}\right) \times \frac{۱}{آ ے} = ۰$

$$م_{۱} \times \frac{ل}{۲} = \frac{و ل^{۲}}{۱۶}$$

$$م_{۱} = \frac{و ل}{۸}$$

انحراف کے لیے دوبارہ تکمل کرنے سے

انحراف $= \iint \frac{م}{آ ے}$ فرلا فرلا

$$= \frac{۱}{آ ے}\left(\frac{و ل لا^{۲}}{۸} - \frac{و لا^{۳}}{۱۲} - \frac{م_{۱} لا^{۲}}{۲} + ج_{۳}\right)$$

$$= \frac{۱}{آ ے}\left(\frac{و ل لا^{۲}}{۱۶} - \frac{و لا^{۳}}{۱۲} + ج_{۳}\right)$$

یہ صفر ہوتا ہے جب کہ لا = $\frac{ل}{۲}$

$$\frac{و ل^{۳}}{۶۴} - \frac{و ل^{۳}}{۹۶} + ج_{۳} = ۰$$

$$\therefore ج_{۳} = \frac{- و ل^{۳}}{۱۹۲}$$

∴ جب لا = ۰ تو انحراف = $\frac{ج_{۳}}{آ ے}$

∴ اعظم انحراف = $\frac{و ل^{۳}}{۱۹۲ آ ے}$

(۳) ثابت شہتیر پر ایک سرے سے ہموار طور پر بڑھتا ہوا

بوجھ ـــــــ فرض کرو کہ فصل ا ب پر جس کا طول ل ہے ایک ہموار طور پر بڑھتا ہوا بوجھ ہے جس کی حدت ب پر صفر ہے، اور فرض کرو کہ ب سے اکائی فاصلہ پر حدت ب اکائیاں فی طولی فٹ ہے۔ تب ب کو مبداء لینے سے آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے:-

$$م_{لا} = \frac{ب ل^2 لا}{6} - \frac{ب لا^3}{6}$$

اب فرض کرو کہ سروں کے خماؤ کے معیار $م_ا$ اور $م_ب$ ہیں۔ تب ب سے فاصلہ لا پر منفی خماؤ کا معیار

$$= م_ب + \frac{(م_ا - م_ب)}{ل} \times لا$$

∴ ثابت شہتیر کے لیے

$$م_{لا} = \frac{ب ل^2 لا}{6} - \frac{ب لا^3}{6} - م_ب - \frac{(م_ا - م_ب) \cdot لا}{ل}$$

∴ شہتیر کا ڈھال $= \int \frac{م}{آ ے} فرلا$

$$= \frac{1}{آ ے}\left\{\frac{ب ل^2 لا^2}{12} - \frac{ب لا^4}{24} - م_ب لا - \frac{(م_ا - م_ب) لا^2}{2 ل} + ج_1\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

جب لا = ۰ تو ڈھال = ۰ ∴ ج۱ = ۰

نیز لا = ل پر بھی ڈھال = ۰

$$\therefore \frac{ب ل^4}{12} - \frac{ب ل^4}{24} - م_ب ل - \frac{(م_ا - م_ب) ل^2}{2 ل} = 0$$

یا $-\frac{م_ب\, ل}{۲} - \frac{م_ا\, ل}{۲} = \frac{-ب\, ل^۲}{۲۴}$

∴ $م_ا + م_ب = \frac{ب\, ل^۲}{۱۲}$ .... (۲)

$م_ا$ اور $م_ب$ کے درمیان ایک اور ربط حاصل کرنے کے لیے انحراف پر غور کرو۔

تب انحراف $= \iint \frac{م}{آ\, ے}\, فرلا\, فرلا$

$= \frac{۱}{آ\, ے}\left\{\frac{ب\, ل^۲\, لا^۳}{۳۶} - \frac{ب\, لا^۵}{۱۲۰} - \frac{م_ب\, لا^۲}{۲} - \frac{(م_ا - م_ب)}{ل} \times \frac{لا^۳}{۶} + ج_۵\right\}$ — (۳)

انحراف = ۰ جب کہ لا = ۰ ∴ $ج_۵ = ۰$

نیز انحراف = ۰ جب کہ لا = ل

∴ $\frac{ب\, ل^۵}{۳۶} - \frac{ب\, ل^۵}{۱۲۰} - \frac{م_ب\, ل^۲}{۲} - \frac{(م_ا - م_ب)}{ل} \times \frac{ل^۳}{۶} = ۰$

∴ $\frac{-م_ب\, ل^۲}{۲} - \frac{م_ا\, ل^۲}{۶} + \frac{م_ب\, ل^۲}{۶} = \frac{ب\, ل^۵}{۱۲۰} - \frac{ب\, ل^۵}{۳۶}$

∴ $\frac{م_ا\, ل^۲}{۶} + \frac{م_ب\, ل^۲}{۳} = \frac{۷\, ب\, ل^۵}{۳۶۰}$

∴ $م_ا + ۲\, م_ب = \frac{۷\, ب\, ل^۳}{۶۰}$ .... (۴)

∴ (۲) اور (۴) کو ملانے سے:

$م_ب = \frac{۷\, ب\, ل^۳}{۶۰} - \frac{ب\, ل^۳}{۱۲}$

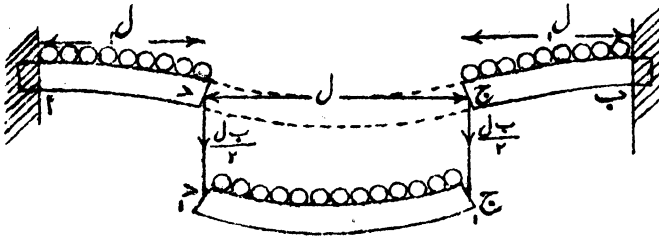
$= \frac{ب\, ل^۳}{۳۰} = \frac{و\, ل}{۱۵}$

∴ $م_ا = \frac{ب\, ل^۳}{۱۲} - \frac{ب\, ل^۳}{۳۰} = \frac{و\, ل}{۱۰}$

خماؤ کے معیار کا نقشہ شکل ۹۸ء میں دکھایا گیا ہے۔ اوپر کی تمام صورتوں میں یہ فرض کیا گیا ہے کہ شہتیر کی تراش سارے طول میں مستقل ہے۔ اگر یہ صورت نہ ہو تو سروں کے خماؤ کے معیار اس طرح حاصل ہونگے کہ خماؤ کے معیار کا مصحح نقشہ لیا جائے جس کا بیان گزشتہ باب میں انصراف کے سلسلے میں آچکا ہے۔

ثابت شہتیروں کے فوائد اور نقصانات ــــــ گزشتہ مثالوں سے معلوم ہو چکا ہے کہ ثابت شہتیر متناظر آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر سے زیادہ مضبوط ہوتا ہے، اور ثابت شہتیر کا انصراف بھی کم ہوتا ہے اس طرح اس کی استواری اور صلابت زیادہ ہے۔ نیز ثابت شہتیروں میں، اکثر صورتوں میں، اعظم خماؤ کا معیار پیل پایوں پر واقع ہوتا ہے اور پیل پایوں پر تراش کو بڑھانے سے خماؤ کا معیار اور زور اتنے زیادہ نہیں بڑھتے۔ اس کے برخلاف آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر میں اعظم خماؤ کا معیار مرکز پر ہوتا ہے اور مرکز پر تراش بڑھانے سے خماؤ کا معیار خاصا بڑھ جاتا ہے۔ ان فوائد کے باوجود جو ثابت شہتیر زیادہ عام نہیں تو اس کی وجہ یہ ہے کہ سروں کو مضبوطی سے ثابت کرنے میں، دونوں سروں پر کے مماس بالکل افقی ہونے چاہییں۔ اگر اس سے ذرا سا انحراف ہو تو زور بدل جائینگے اور اگر غیر مساوی بٹھاؤ کی وجہ سے دونوں سروں کا لیول ایک ہی نہ ہو تو شہتیر میں قابلِ لحاظ زور پیدا ہو جائینگے۔ نیز اگر شہتیر چنائی میں مضبوطی سے چنا ہوا ہو تو تپش کے تغیرات کی وجہ سے بھی قابلِ لحاظ زور پیدا ہوتا ہے۔ اور ان سب باتوں کی وجہ سے عملی صورتوں میں حقیقی زور کسی قدر غیر معین ہوتے ہیں۔ اس وجہ سے اکثر مجوز اس قسم کے شہتیر کا استعمال نہیں کرتے۔ اوپر کے تمام نقائص اس طرح دور ہو سکتے ہیں کہ شہتیر کو نقاطِ انعطاف پر کاٹ دیا جائے اور بیچ کے حصے کو سروں کے حصوں پر ٹکایا جائے۔ برآمدہ کا بیرمی گرڈر کی ساخت کا یہی اصول ہے اور بڑے فصلوں میں بہت باکفایت ثابت ہوتا ہے۔ اس ساخت کو شکل ۹۸ء میں دکھایا گیا ہے جس میں ایک ثابت شہتیر ا ب کو نقاطِ انعطاف ج اور د پر تقسیم کیا گیا ہے اور وسطی حصے کو سروں کے حصوں سے

لٹکتا ہوا دکھایا گیا ہے۔ وسطی حصے میں خماؤ کا معیار وہی ہوگا جو فصل ل کے آزادانہ سہارے ہوئے اور دیے ہوئے لداؤ کے مطابق لدے ہوئے شہتیر کے لیے ہوتا۔

شکل ۹۸ و

برآمدہ بیرم نما حصوں کے لیے خماؤ کا معیار وہ ہوگا جو فصل ل کے برآمدہ بیرم میں ہوتا جس پر لداؤ دیے ہوئے لداؤ کے مطابق ہو اور اس کے علاوہ سرے پر ایک بوجھ وسطی حصے کے ردِ عمل کے مساوی ہو۔ شکل میں یکساں لداؤ دکھایا گیا ہے اور اس صورت میں یہ ردِ عمل $\frac{ب ل}{۲}$ کے مساوی ہیں۔ یہ پایا جائیگا کہ اس طرح جو حاصل خماؤ کے معیار اور جز کے منحنی حاصل ہونگے وہ شکل ۹۵ کے جیسے ہونگے۔ انصراف بھی اس طرح حاصل ہوسکتے ہیں کہ وسطی حصہ مرکز کے انصراف کو اور ایک برآمدہ بیرم نما حصے کے سرے کے انصراف کو باہم جمع کیا جائے۔

ثابت شہتیر جس کے سرے ایک لیول میں نہ ہوں۔

فرض کرو کہ ایک ثابت شہتیر ا ب (شکل ۹۹) کے سرے ایک لیول میں نہیں۔ تب شہتیر پر کے لداؤ سے قطع نظر کرکے شہتیر کی منصرف وضع وہ ہوگی جو شکل میں دکھائی گئی ہے۔ نقطۂ انعطاف مرکز ج پر ہوگا۔

شہتیر کو ج پر تقسیم کیا جائے تو حصہ اج کا انصراف ب ع وہ ہوگا جو ج پر کسی بوجھ ف کے لٹکنے سے ہوتا۔ برآمدہ بیرم کے سرے پر بوجھ ہوتو

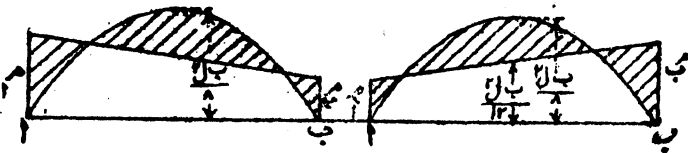
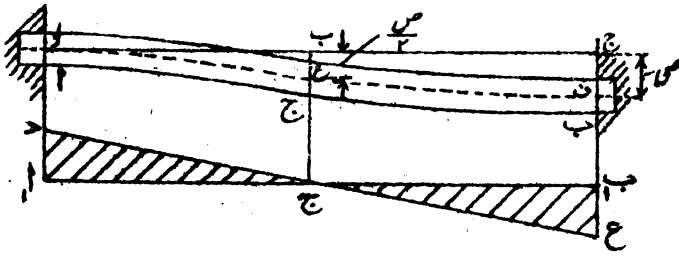
contraflexure

$$صہ = \frac{و\ ل^۳}{۳\ آ\ ے}$$

موجودہ صورت میں $ب\ ع = \frac{ب\ (\frac{ل}{۲})^۳}{۳\ آ\ ے}$

$$\therefore\ ب = \frac{۲۴\ آ\ ے \times ب\ ع}{ل^۳}$$

$$= \frac{۱۲\ آ\ ے \times ج\ ف}{ل^۳}$$

$$= \frac{۱۲\ آ\ ے \times ص}{ل^۳}$$

نیچے کا سرا ا نیچے کا سرا ب

شکل ۹۹۔ شہتیر جن کے سرے مختلف لیولوں پر ہوں

اِس کی وجہ سے خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مثلث ج ا، د ہوگا جس میں

$ا، د = ب \times \frac{ل}{۲}$

$$\therefore \quad ا_1 د = \frac{۱۲ \text{ آ}_\text{ے} \times ص}{۲ \text{ ل}^۲} = \frac{۶ \text{ آ}_\text{ے} ص}{\text{ل}^۲}$$

اسی طرح حصہ ج ب اس طرح ہے گویا اس کے سرے پر ایک بوجھ ب اوپر وار عمل کر رہا ہے۔ اس حصے کے لیے خماؤ کا میعار ج ب ا ع ہوگا جس میں ب ا ع = ا ا د
اس لیے مکمل نقشہ حاصل کرنے کے لیے اس کو ثابت شہتیر کے معمولی نقشے کے ساتھ مرکب کرنا ہوگا۔ شکل میں دونوں صورتوں کے اثرات دکھائے گئے ہیں۔ ایک وہ جس میں ب نیچا ہے۔ دوسری وہ جس میں ا نیچا ہے۔
وہ شرط کہ سروں کے خماؤ کے میعار کا نقشہ رقبے میں آزاد نقشے کے مساوی ہونا چاہیے اس صورت میں بھی درست ہے البتہ ان کے مرکزِ ہندسی ایک انتصابی خط میں نہیں ہونگے کیونکہ ایک سرے پر انصراف پایا جاتا ہے۔
مور (Mohr) کے مسئلے کی خیالی طناب کے ذریعے دکھایا جا سکتا ہے کہ آ ے × ص = خماؤ کے میعار کے منحنی کا رقبہ × آزاد نقشے اور سروں کے نقشے کے مراکزِ ہندسی کے درمیان کا افقی فاصلہ گ۔

$$\text{یعنی} \qquad \text{آ}_\text{ے} \times ص = \frac{ب \text{ ل}^۲}{۱۲} \times \text{ل} \times \text{گ}$$

$$\therefore \quad \text{گ} = \frac{۱۲ \text{ آ}_\text{ے} \times ص}{ب \text{ ل}^۳}$$

اب اگر سروں کے خماؤ کے میعار $م_ا$ اور $م_ب$ ہوں تو سروں کا نقشہ ایک منحرف ہوگا۔

$$\therefore \quad \text{گ} = \frac{\text{ل}}{۲} - \frac{\text{ل}}{۳}\left(\frac{۲ م_ب + م_ا}{م_ب + م_ا}\right)$$

$$= \frac{\text{ل}}{۶} \frac{(م_ا - م_ب)}{(م_ب + م_ا)}$$

$$\therefore\ م_ا - م_ب = \frac{۶(م_ب + م_ا)گ}{ل} = ۶ \times \frac{۲ب ل^۲}{۱۲} \times \frac{گ}{ل}$$

$$= \frac{۱۲\ آ ے\ ص}{ل^۲}$$

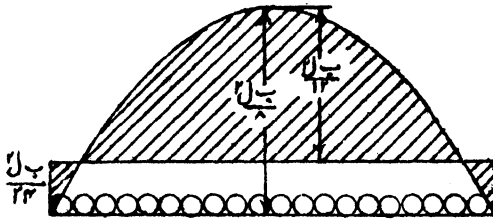
اب شکل میں $م_ا - م_ب = ۲\ ا_ا د$

$$\therefore\ ا_ا د = \frac{م_ا - م_ب}{۲} = \frac{۶\ آ ے\ ص}{ل^۲}$$

اس سے وہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے جو سابقہ استدلال سے حاصل ہوا۔

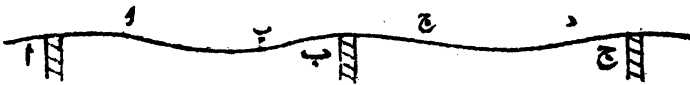
شہتیر جن میں کلیٹ دار رابطے وغیرہ ہوں — تعمیروں کے کاموں میں گرڈروں کو ستونوں یا کھموں کے ساتھ کلیٹ دار رابطوں کے ذریعے جوڑا جاتا ہے جن کی استواری اور صلابت کی وجہ سے یہ امر مشکوک ہو جاتا ہے کہ گرڈر ایک آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کا عمل کریگا اگرچہ حساب لگانے میں ان کی مضبوطی ہمیشہ اسی امر پر مبنی رہتی ہے۔ اور معمولی کلیٹ اتنے استوار بھی نہیں ہوتے کہ اِن گرڈروں کو ثابت سمجھا جائے۔ ایسے شہتیروں کا حقیقی خماؤ کے معیار کا نقشہ آزادانہ سہارے ہوئے اور ثابت شہتیر کے درمیان ہوگا۔ ایک خیال یہ ظاہر کیا گیا ہے کہ اِن شہتیروں کو "نیم ثابت" سمجھا جائے، یعنی یکساں لداؤ کی صورت میں سروں کے خماؤ کے معیار $\frac{ب ل^۲}{۲۴}$ لیے جائیں۔ اس طرح خماؤ کے معیار کا نقشہ شکل ۱۰۰ء کے مطابق ہوگا۔ دیکھو اعظم خماؤ کا معیار اس صورت میں بھی ثابت شہتیر کی طرح $\frac{ب ل^۲}{۱۲}$ ہی ہے البتہ یہ اس صورت میں امرکز پر واقع ہوتا ہے۔

جن شہتیروں کے مادے کی تنتی اور فشاری مضبوطیاں مختلف ہوں، مثلاً ڈھلے لوہے اور محکم کنکریٹ کے شہتیر ان میں یہ اچھی طرح یاد رہے کہ سروں پر تنتی پہلو اوپر کا ہے اور ان سروں پر اوپر کے پہلو میں مزید مضبوطی شریک کرلی چاہیے۔ اس کی مزید مثالیں محکم کنکریٹ کے باب میں پیش آئینگی۔

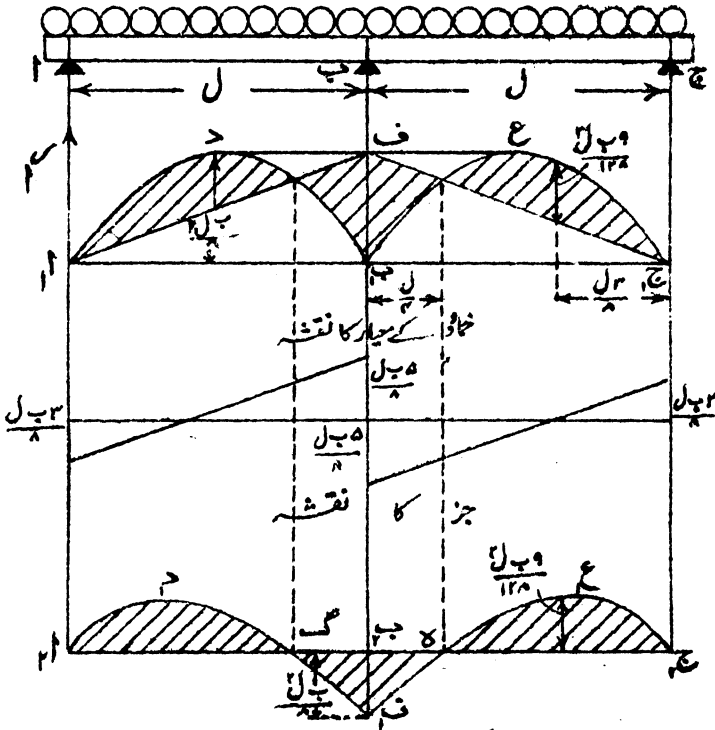
شکل ۱۰۰

یہ بھی یاد رہے کہ ان سب صورتوں میں ہم نے شہتیر کی تراش کو سارے طول میں مستقل مانا ہے۔ اگر کسی صورت میں ایسا نہ ہو تو نتائج صحیح نہیں ہونگے۔

مسلسل شہتیر

اگر ایک شہتیر متعدد سہاروں ا، ب، ج، وغیرہ، پر مسلسل ہو تو شہتیر کی منصرف وضع ایسی ہی کوئی ہوگی جیسی کہ شکل ۱۰۱ میں دکھائی گئی ہے جس میں

شکل ۱۰۱

انحنا کی سمت نقاط و، ب، ج، د پر بدلتی ہے۔ ثابت شہتیروں کی طرح انحنا کی تبدیلی کے معنے یہ ہیں کہ سہاروں پر منفی خماؤ کے معیار ہونگے۔ ان خماؤ کے معیاروں کو ہم آیندہ "سہاروں کے معیار" کہینگے۔

پہلے ایک مسلسل شہتیر ا ب ج (شکل ۱۰۲) پر غور کرو جس کے دو مساوی فصل

طول ل کے ہیں جس پر ایک یکساں بوجھ ب ٹن فی طولی فٹ کا ہے۔

خلاؤ کے معیار کا نقشہ خطِ مستقیم کے اساس پر

شکل ۱۰۲ع - یکساں لدا ہوا مسلسل شہتیر دو فصل کا

سہارے ا، ب، ج ایک ہی سطح میں ہیں اور شہتیر کی تراش یکساں ہے۔ اب وسطی سہارے کو خیالی طور پر ہٹا دو تو ایک وسطی انصراف

$$صہ = \frac{۵ ب (۲ ل)^{۴}}{۳۸۴ آ ے}$$

پیدا ہوگا۔

اب وسطی سہارے کو پھر اس کی جگہ رکھ دو تو اس پر دباؤ رب کی مقدار

ایسی ہوگی کہ اس سے ایک مرکزی بوجھ کی حیثیت سے انصراف صہ پیدا ہو۔

$$\therefore \quad صہ = \frac{ر \times (۲ل)^{۳}}{۴۸ \, آ \, ے}$$

$$\therefore \quad \frac{ر \times (۲ل)^{۳}}{۴۸ \, آ \, ے} = \frac{۵ \, ب \, (۲ل)^{۴}}{۳۸۴ \, آ \, ے}$$

$$\therefore \quad ر = \frac{۵ \, ب \times ۲ \, ل}{۸} = \frac{۵ \, ب \, ل}{۴}$$

یعنی اگر ایک فصل پر بوجھ و ہو تو $ر = \frac{۵ و}{۴}$

اور چونکہ تشاکل سے $ر_{ا} = ر_{ج}$ اور $ر_{ا} + ر_{ب} + ر_{ج} = ۲ و$

اِس لیے $ر_{ا} = ر_{ج} = \frac{۳ و}{۸} = \frac{۳ ب ل}{۸}$

دونوں فصل علاحدہ ہوتے تو $ر_{ا} = ر_{ج} = \frac{و}{۲}$

اِس لیے سہاروں کے معیاروں کا نقشہ ایسا ہوگا گویا کہ ا اور ج پر ایک اوپروار قوت $\frac{و}{۸}$ عمل کر رہی ہے۔ اِس سے ب پر خماؤ کا معیار $\frac{و}{۸} \times ل = \frac{و ل}{۸}$ پیدا ہوگا۔ اِسی طرح ب پر منفی خماؤ کا معیار $= \frac{و ل}{۸} = \frac{ب ل^{۲}}{۸}$ اور اس طرح مسلسل شہتیر کے خماؤ کے معیار کا نقشہ شکل ۱۰۲ ا کے مطابق ہوگا۔

چونکہ ا اور ج پر کے ردِّ عمل $\frac{۳}{۸}$ ب ل ہیں، اس لیے جز کے نقشے کے معین ان نقاط پر $\frac{۳}{۸}$ ب ل ہونگے۔ اور جز ج سے ب تک ہموار طور پر گھٹتے ہوئے ب پر $-\frac{۵}{۸}$ ب ل ہوگا۔ یہاں ایک دم بڑھ کر $+\frac{۵}{۸}$ ب ل ہوجائیگا کیونکہ $ر_{ب} = \frac{۵}{۴}$ ب ل۔ پھر دوبارہ گھٹتے ہوئے ا پر $-\frac{۳}{۸}$ ب ل ہوگا اور جز کا نقشہ شکل کے مطابق ہوگا۔

نقاطِ انعطاف* گ، ھ، جہاں خماؤ کا معیار صفر ہوتا ہے ب سے $\frac{\text{ل}}{۴}$ کے فاصلے پر واقع ہوتے ہیں۔

اس کا ثبوت حسب ذیل ہے:-

فرض کرو کہ ھ کا فاصلہ ج سے لا ہے۔

تب سہاروں کے معیار کی وجہ سے منفی خماؤ کا معیار $= \frac{\text{و لا}}{۸} = \frac{\text{ب ل لا}}{۸}$

آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے مثبت خماؤ کا معیار $= \frac{\text{ب ل لا}}{۲} - \frac{\text{ب لا}^{۲}}{۲}$

یہ دونوں مساوی ہونے چاہییں اس لیے

$$\frac{\text{ب ل لا}}{۸} = \frac{\text{ب ل لا}}{۲} - \frac{\text{ب لا}^{۲}}{۲}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{لا}}{۲} = \frac{\text{ل}}{۲} - \frac{\text{ل}}{۸} = \frac{۳\text{ل}}{۸}$$

$$\therefore \quad \text{لا} = \frac{۳\text{ل}}{۴}$$

$$\therefore \quad \text{ب سے فاصلہ} = \text{ل} - \frac{۳\text{ل}}{۴} = \frac{\text{ل}}{۴}$$

اگر خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک خطِ مستقیم کی اساس پر تحویل کیا جائے تو وہ نقشہ حاصل ہوگا جو شکل میں نیچے دیا گیا ہے۔

درمیانی اعظم خماؤ کے معیار ج اور ا سے فاصلہ $\frac{۳\text{ل}}{۸}$ پر واقع ہونگے۔ اور حسب ذیل ہونگے:-

$$\frac{\text{ب ل}}{۲} \times \frac{۳\text{ل}}{۸} - \frac{\text{ب}}{۲}\left(\frac{۳\text{ل}}{۸}\right)^{۲} - \frac{\text{ب ل}}{۸} \times \frac{۳\text{ل}}{۸}$$

$$= \text{ب ل}^{۲}\left(\frac{۳}{۱۶} - \frac{۹}{۱۲۸} - \frac{۳}{۶۴}\right)$$

* contraflexure

$$= \frac{۹ ب ل^۲}{۱۲۸} = \frac{۹ و ل}{۱۲۸}$$

دو مساوی اور یکساں لدے ہوئے فصل لیکن سہارے ایک سطح میں نہیں۔۔۔ اب اُس صورت پر غور کرو کہ مرکزی سہارا ب سہاروں ا اور ج سے مختلف سطح میں ہے اور اج سے فاصلہ ﮪ کے بقدر نیچے ہے۔ (شکل ۱۰۳)۔

حسب سابق اگر سہارا ب نکال لیا جائے تو مرکزی انصراف

$$صہ = \frac{۵ ب (۲ ل)^۴}{۳۸۴ \, آ \, ے}$$

پیدا ہوگا۔

اب ب پر کا ردِّ عمل صرف اتنا ہے جس سے ایک اوپر وار انصراف صہ۔ﮪ پیدا ہو۔

$$\therefore \quad صہ - ﮪ = \frac{ﺳ_ب (۲ ل)^۳}{۴۸ \, آ \, ے}$$

$$\therefore \quad ﺳ_ب = \frac{۴۸ \, آ \, ے}{(۲ ل)^۳} (صہ - ﮪ)$$

$$= \frac{۴۸ \, آ \, ے}{(۲ ل)^۳} صہ \left(۱ - \frac{ﮪ}{صہ}\right)$$

$$\therefore \quad ﺳ_ب = \frac{۴۸ \, آ \, ے}{(۲ ل)^۳} \times \frac{۵ ب (۲ ل)^۴}{۳۸۴ \, آ \, ے} \left(۱ - \frac{ﮪ}{صہ}\right)$$

$$= \frac{۵ ب ل}{۴} \left(۱ - \frac{ﮪ}{صہ}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۱)$$

$$= \frac{۵ ب ل}{۴} - \frac{۵ ب ﮪ ل}{۴ \, صہ}$$

$$\therefore \quad م_ا = م_ج = \frac{۳ ب ل}{۸} + \frac{۵ ھ ب ل}{۸ ص}$$

$$= \frac{ب ل}{۲} - \frac{ب ل}{۸}\left(۱ - \frac{۵ ھ}{ص}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

∴ پہلے کے سے استدلال سے $م_ا$ یا $م_ج$ کی قیمت کے دوسرے حصے کی وجہ سے ب پر منفی خماؤ کا معیار

$$= \frac{ب ل^۲}{۸}\left(۱ - \frac{۵ ھ}{ص}\right)$$

$$\therefore \quad م_ب = \frac{ب ل^۲}{۸}\left(۱ - \frac{۵ ھ}{ص}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اس لیے خماؤ کے معیار کا منحنی کچھ اس طرح کا ہوگا جیساکہ سایہ دار دکھایا گیا ہے۔ اس میں د کا محل $\frac{ھ}{ص}$ کی قیمت پر منحصر ہوگا۔

اب ھ کی حسب ذیل خاص قیمتوں پر غور کرو:۔

اگر ھ = ۰ تو $م_ب = \frac{ب ل^۲}{۸}$ گزشتہ صورت کی طرح۔

اگر ھ = $\frac{ص}{۵}$ تو $م_ب$ = ۰، اور خماؤ کا معیار وہی ہوگا جو کہ دو سادہ سہارے ہوئے شہتیروں کے لیے ہوتا۔

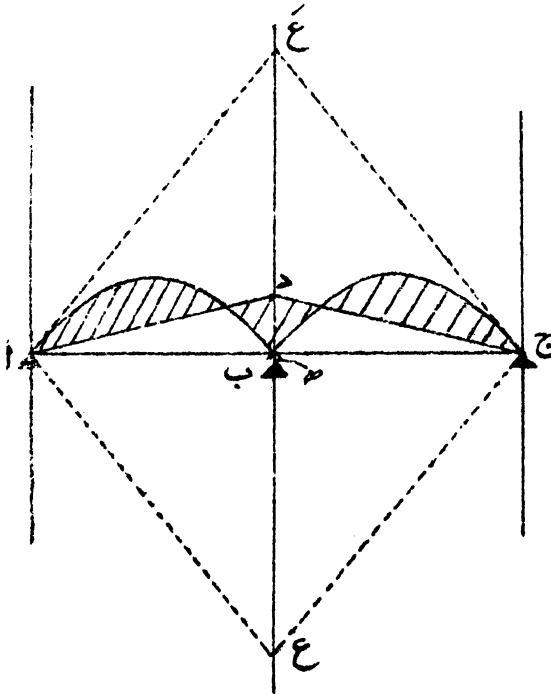
اگر ھ = ص تو $م_ب = \frac{ب ل^۲}{۸}(۱ - ۵) = -\frac{ب ل^۲}{۲}$ اور یہ وہی ہوگا جو فصل ۲ ل کے ایک سادہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے ہوتا۔

اب فرض کرو کہ ھ = $-\frac{۳ ص}{۵}$

تو $م_ب = \frac{ب ل^۲}{۸}(۱ + ۳) = \frac{ب ل^۲}{۲}$، اور یہ وہی ہے جو کہ سہاروں ا اور ج کو نکال دینے اور شہتیر کو دو برآمدہ بیرموں ب ا اور ب ج پر مشتمل کرنے سے ہوتا۔ سروں پر انصراف اس صورت میں = $\frac{ب ل^۴}{۸ آ ے}$،

اور یہ $\frac{۳}{۵}$ صہ کے مساوی ہوگا۔

اگر شہتیر ایک مسلسل شہتیر کا عمل کرتا ہے تو ھ کو صہ اور $\frac{۳}{۵}$ صہ کے درمیان ہونا چاہیے۔ اس لیے دب میں سے کے انتصابی خط پر نقاط ع عَ ایسے لو کہ ب عَ = ب ع = $\frac{ب ل^{۲}}{۲}$، تب مسلسل شہتیر کے لیے جب کہ سہارے ایک سطح میں نہ ہوں خماؤ کے معیار کے نقشے کا بند کرنے والا خط ا ع ج اور ا عَ ج کے درمیان واقع ہونا چاہیے۔

شکل ۱۳۲

مسلسل شہتیر تین سہاروں کا جو ایک سطح میں نہیں

اس مسئلے پر ذیل کی مثال دلچسپی سے خالی نہ ہوگی:۔

ایک مسلسل شہتیر پر جس کی تراش یکساں ہے اور جس کے دو مساوی فصل طول ل کے ہیں حد ت ب کا ایک یکساں بوجھ ہے' اور سہارے ا' ب' ج ابتداءً ایک سطح میں ہیں لیکن سہاروں کے ستون مساوی طور پر لچکدار ہیں اور ان کو اکائی فاصلہ دبانے کے لیے قوت ع درکار ہوتی ہے۔ مرکزی ردِّ عمل اور خماؤ کا معیار معلوم کرو۔

اگر وسطی ستون ہٹا دیا جائے تو $\text{صہ} = \frac{\text{۵ ب (۲ ل)}^{۴}}{\text{۳۸۴ آ ے}}$

$ر_ب$ کی وجہ سے اوپر وار انصراف $= \text{صہ}_۱ = \frac{ر_ب\,\text{(۲ ل)}^{۳}}{\text{۴۸ آ ے}}$

تب $\text{صہ} - \text{صہ}_۱$ = ا ب' ج کی آخری سطحوں کا فرق

اب فرض کرو کہ $ر_ب = \text{ب ل} + \text{۲ ف}$' جہاں ۲ ف شہتیر کے مسلسل ہونے کی وجہ سے دباؤ کا اضافہ ہے۔ تب

$$ر_ا = ر_ج = \frac{\text{ب ل}}{۲} - \text{ف}$$

$$\therefore \text{وسطی ستون کا دھنساؤ} = \frac{\text{ب ل} + \text{۲ ف}}{\text{ع}}$$

$$\text{سروں کے ستونوں کا دھنساؤ} = \frac{\frac{\text{ب ل}}{۲} - \text{ف}}{\text{ع}}$$

$$\therefore \text{فرق} = \text{صہ} - \text{صہ}_۱ = \frac{۱}{\text{ع}}\left(\frac{\text{ب ل}}{۲} + \text{۳ ف}\right)$$

$$= \frac{۱}{\text{ع}}\left(\frac{۳\,ر_ب}{۲} - \text{ب ل}\right)$$

$$\therefore \frac{۱}{ع}\left(\frac{۳ ک}{۲} - ب ل\right) = ص_۱ - ص_۲$$

$$= \frac{۵ ب ل^۳}{۲۴ آ ے} - \frac{ک ل^۳}{۶ آ ے}$$

$$\therefore ک\left(\frac{ل^۳}{۶ آ ے} + \frac{۳}{۲ ع}\right) = \frac{۵ ب ل^۳}{۲۴ آ ے} + \frac{ب ل}{ع}$$

$$\therefore ک = \frac{\frac{۵ ب ل^۳}{۲۴ آ ے} + \frac{ب ل}{ع}}{\frac{ل^۳}{۶ آ ے} + \frac{۳}{۲ ع}}$$

$$= ب ل \left\{\frac{\frac{۵ ل^۳}{۲۴ آ ے} + \frac{۱}{ع}}{\frac{ل^۳}{۶ آ ے} + \frac{۳}{۲ ع}}\right\}$$

$$= ب ل \left\{\frac{\frac{۵}{۴} + \frac{۶ آ ے}{ع ل^۳}}{۱ + \frac{۹ آ ے}{ع ل^۳}}\right\}$$

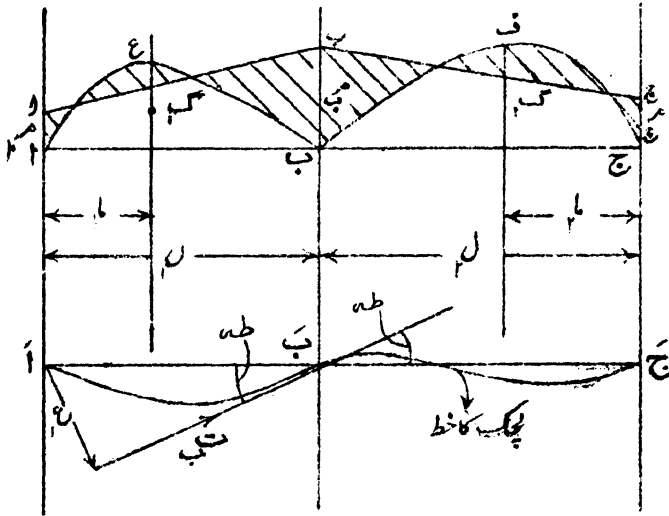
پہلے کے سے استدلال سے

$$م_ب = \frac{ب ل^۲}{۲}\left\{۱ - \frac{\frac{۵}{۴} + \frac{۶ آ ے}{ع ل^۳}}{۱ + \frac{۹ آ ے}{ع ل^۳}}\right\}$$

$$\frac{ب\,ل_۲}{۲} = \left\{ \frac{\frac{۱}{۴} - \frac{۳\,آ\,ے}{ع\,ل^۳}}{۱ + \frac{۹\,آ\,ے}{ع\,ل^۳}} \right\}$$

یہ ظاہر ہے کہ اگر تینوں پائے ایک ہی شے کے ہوں اور ان کے رقبے ردِّ عمل کے متناسب ہوں تو لچک کی وجہ سے اُن کا دھنساؤ مساوی ہوگا اور اس صورت میں خماؤ کے معیار کا نقشہ وہی رہیگا جو شکل ۱۰۲ میں دکھایا گیا ہے۔

تین معیاروں کا مسئلہ — اب ہم معلوم کرینگے کہ اگر ایک مسلسل شہتیر میں فصلوں کی کوئی تعداد ہو اور سب سہارے ایک ہی سطح میں ہوں تو سہاروں کے خماؤ کے معیاروں اور لداؤں میں کیا ربط ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک مسلسل شہتیر میں کئی فصل ہیں اور ا ب اور ب ج اس کے دو متصل فصل ہیں جن کے طول $ل_۱$ اور $ل_۲$ ہیں اور فرض کرو کہ ا ع ب اور ب ف ج (شکل ۱۰۳) ان فصلوں کے لداؤ کے آزاد خماؤ کے معیار کے نقشے ہیں۔

شکل ۱۰۳ - تین معیاروں کا مسئلہ

فرض کرو کہ اِن آزاد نقشوں کے مرکزِ ہندسی گ_{1} اور گ_{2} ہیں، اور گ_{1} کا فاصلہ ا سے ما_{1} اور گ_{2} کا ج سے ما_{2} ہے اور ان نقشوں کے رقبے علی الترتیب س_{1} اور س_{2} ہیں۔ تب اگر ا، ب، ج کے سہاروں کے معیار $\text{م}_{\text{ا}}$، $\text{م}_{\text{ب}}$، $\text{م}_{\text{ج}}$ ہوں تو کلے پی راں[۱] کا تین معیاروں کا مسئلہ یہ ہے کہ

$$\text{م}_{\text{ا}}\,\text{ل}_{1} + 2\,\text{م}_{\text{ب}}\,(\text{ل}_{1} + \text{ل}_{2}) + \text{م}_{\text{ج}}\,\text{ل}_{2} = 6\left\{\frac{\text{س}_{1}\,\text{ما}_{1}}{\text{ل}_{1}} + \frac{\text{س}_{2}\,\text{ما}_{2}}{\text{ل}_{2}}\right\}$$

اس کو مور (Mohr) کے مسئلے کی مدد سے یوں ثابت کیا جا سکتا ہے: فرض کرو کہ اَ بَ جَ شہتیر کی منصرف وضع یا لچک کا خط ہے۔ تب اگر شہتیر کا مادہ اور اس کی تراش سارے طول میں یکساں ہو تو لچک کا خط اُسی شکل کا ہوگا جو ایک خیالی طناب کی ہوگی جس پر بوجھ خماؤ کے معیار کے نقشے کا ہو اور جس میں افقی تناؤ اَ × مے کے مساوی ہو۔ اب نقطہ بَ پر خیالی طناب کے دونوں حصوں کا مماس مشترک ہے۔ فرض کرو کہ یہ مماس خط اَ بَ سے زاویہ طہ بناتا ہے اور فرض کرو کہ اَ سے اِس پر عمود کا طول ع_{1} ہے، اور اس طناب میں ب پر تناؤ $\text{ت}_{\text{ب}}$ ہے۔ تب اِس خیالی طناب کا فصل ا ب لے کر اس کے توازن پر غور کریں اور ا کے گرد معیار لیں تو

$\text{ت}_{\text{ب}} \times \text{ع}_{1}$ = خماؤ کے معیار کے نقشے کا معیار ا کے گرد

= $\text{س}_{1}\,\text{ما}_{1}$ - سہاروں کے معیاروں کے نقشے کا معیار ا کے گرد

$$= \text{س}_{1}\,\text{ما}_{1} - \text{م}_{\text{ا}}\frac{\text{ل}_{1}}{2} \times \frac{\text{ل}_{1}}{3} - \text{م}_{\text{ب}}\frac{\text{ل}_{1}}{2} \times \frac{2\,\text{ل}_{1}}{3}$$

$$= \text{س}_{1}\,\text{ما}_{1} - \frac{\text{م}_{\text{ا}}\,\text{ل}_{1}^{2}}{6} - 2\,\text{م}_{\text{ب}}\frac{\text{ل}_{1}^{2}}{6} \quad \text{......(۱)}$$

کیونکہ سہاروں کے معیاروں کے نقشے کو دو مثلثوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے جن کے رقبے $\text{م}_{\text{ا}}\frac{\text{ل}_{1}}{2}$ اور $\text{م}_{\text{ب}}\frac{\text{ل}_{1}}{2}$ ہوں گے، اور جن کے مراکزِ ہندسی کے فاصلے

---

[۱] clapeyron

آ سے $\frac{ل_۱}{۳}$ اور $\frac{۲ل_۱}{۳}$ ہونگے۔ اب ع$_۱$ = ل$_۱$ جب طہ اور ت$_پ$ = $\frac{آ سے}{جم طہ}$

کیونکہ آ سے طناب کا افقی تناؤ ہے۔

$$\therefore\ ت_پ \times ع_۱ = \frac{آ سے ل_۱ جب طہ}{جم طہ} = آ سے ل_۱ مس طہ$$

$$\therefore\ آ سے ل_۱ مس طہ = س_۱ ما_۱ - \frac{م_۱ ل_۱^۲}{۶} - \frac{۲ م_پ ل_۱^۲}{۶}$$

$$\therefore\ آ سے مس طہ = \frac{س_۱ ما_۱}{ل_۱} - \frac{م_۱ ل_۱}{۶} - \frac{۲ م_پ ل_۱}{۶} \quad ......(۲)$$

اب دوسرے فصل پر غور کرو۔ چونکہ طہ دونوں فصلوں کے لیے ایک ہی ہے اور آ سے مستقل ہے، اِس لیے

$$آ سے مس طہ = -\left(\frac{س_۲ ما_۲}{ل_۲} - \frac{م_ج ل_۲}{۶} - \frac{۲ م_پ ل_۲}{۶}\right) \quad ......(۳)$$

منفی علامت اِس لیے لگائی گئی کہ معیار مخالف سمت میں لیے گئے۔ مساواتوں (۲) اور (۳) کو ملانے سے

$$\frac{س_۱ ما_۱}{ل_۱} - \frac{م_۱ ل_۱}{۶} - \frac{۲ م_پ ل_۱}{۶} = -\left(\frac{س_۲ ما_۲}{ل_۲} - \frac{م_ج ل_۲}{۶} - \frac{۲ م_پ ل_۲}{۶}\right)$$

$$یا\ م_۱ ل_۱ + ۲ م_پ (ل_۱ + ل_۲) + م_ج ل_۲ = ۶\left(\frac{س_۱ ما_۱}{ل_۱} + \frac{س_۲ ما_۲}{ل_۲}\right) \quad ......(۴)$$

یہ وہ عام ضابطہ ہے جو ہر قسم کے لداؤ کے لیے صحیح ہے۔ اگر لداؤ ہر ایک فصل پر یکساں ہو لیکن مختلف۔ حدتوں ب$_۱$ اور ب$_۲$ کا ہو تو

$$س_۱ = \frac{۲}{۳} ل_۱ \times \frac{ب_۱ ل_۱^۲}{۸} = \frac{ب_۱ ل_۱^۳}{۱۲}$$

$$ما_۱ = \frac{ل_۱}{۲}$$

اِسی طرح $س_۲ = \frac{ب_۲ ل_۲^۳}{۱۲}$

$ا_۲ = \frac{ل_۲}{۲}$

$\therefore \frac{س_۱ ا_۱}{ل_۱} + \frac{س_۲ ا_۲}{ل_۲} = \frac{۱}{۲۴}(ب_۱ ل_۱^۳ + ب_۲ ل_۲^۳)$

$\therefore$ اِس صورت کے لیے

$م_۱ ل_۱ + ۲ م_ب (ل_۱ + ل_۲) + م_ج ل_۲ = \frac{۱}{۴}(ب_۱ ل_۱^۳ + ب_۲ ل_۲^۳) \ldots (۵)$

اگر دونوں فصلوں پر بوجھ کی حدت مساوی ہو تو

$م_۱ ل_۱ + ۲ م_ب (ل_۱ + ل_۲) + م_ج ل_۲ = \frac{ب}{۴}(ل_۱^۳ + ل_۲^۳) \ldots (۶)$

ردِّ عمل اور جز کے نقشے ــــ ثابت شہتیروں کی طرح مسلسل شہتیروں کے جز کے نقشوں کے اساسی خط بھی خماؤ کے معیار کے منحنی کے ڈھال کی تبدیلی کی وجہ سے ہٹ جائینگے۔

کسی سہارے مثلاً ب پر غور کرو اور فرض کرو کہ ب پر فصل $ل_۱$ کی وجہ سے آزادانہ سہارے ہوئے فصلوں کی صورت میں ردِّ عمل $ر_۱$ ہوتا اور مسلسل شہتیر کی صورت میں $ر'_۱$ ہوتا ہے۔

تب خماؤ کے معیار کے منحنی کے ڈھال کی تبدیلی $= \frac{م_ب - م_۱}{ل_۱}$

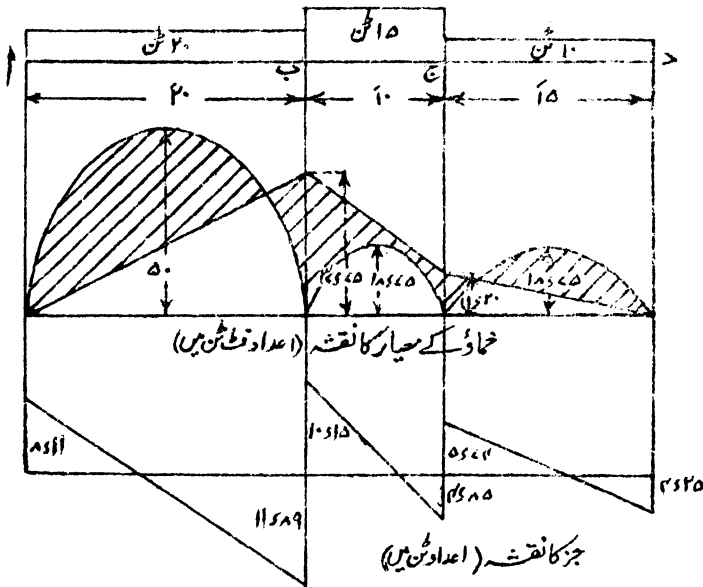
$\therefore ر'_۱ = ر_۱ + \frac{م_ب - م_۱}{ل_۱}$

اسی طرح اگر فصل $ل_۲$ کی وجہ سے مقداریں $ر_۲$ اور $ر'_۲$ ہوں تو

$$\text{ر}'_{۲} = \text{ر}_{۲} + \frac{\text{م}_{ب} - \text{م}_{ج}}{\text{ل}_{۲}}$$

∴ ب پر مجموعی ردِّ عمل $= \text{ر}_{ب} = \text{ر}'_{۱} + \text{ر}'_{۲} = \text{ر}_{۱} + \text{ر}_{۲} + \frac{\text{م}_{ب} - \text{م}_{ا}}{\text{ل}_{۱}} + \frac{\text{م}_{ب} - \text{م}_{ج}}{\text{ل}_{۲}}$

تب $\text{ر}'_{۱}$ اور $\text{ر}'_{۲}$ سے ب کے دونوں طرف جز کے نقشوں کے معین حاصل ہونگے۔ یہ ذیل کی عددی مثال سے اور زیادہ واضح ہوجائیگا۔

شکل ۱۰۵ ـ تین فصل کا مسلسل شہتیر

ایک مسلسل گرڈر اب ج د (شکل ۱۰۵) تین فصلوں پر مشتمل ہے، جن کے طول ۲۰، ۱۰، ۱۵ فٹ ہیں۔ پہلے فصل پر ۲۰ ٹن، دوسرے پر ۱۵ ٹن،

اور تیسرے پر ۱۰ ٹن کا بوجھ یکساں پھیلا ہوا ہے۔ خماؤ کے معیار اور جنبش کے نقشے کھینچو۔

پہلے خماؤ کے معیار کے نقشے یہ سمجھ کر کھینچو کہ تینوں فصل علیحدہ علیحدہ آزادانہ سہارے ہوئے ہیں۔

اب پہلے دو فصلوں کو لو تو تین معیاروں کے مسئلے کی رُو سے

$$\text{م}_{\text{ا}} \times ۲۰ + ۲\,\text{م}_{\text{ب}} \times ۳۰ + \text{م}_{\text{ج}} \times ۱۰ = \frac{۱}{۴}\left\{ ۲۰^{۳} \times \frac{۲۰}{۲۰} + ۱۰^{۳} \times \frac{۱۵}{۱۰} \right\}$$

لیکن سرا ا آزادانہ سہارا ہوا ہے $\therefore\ \text{م}_{\text{ا}} = ۰$

$$\therefore\ ۶۰\,\text{م}_{\text{ب}} + ۱۰\,\text{م}_{\text{ج}} = \frac{۱۰^{۳}}{۴}\left(۸ + \frac{۱۵}{۱۰}\right)$$

$$\text{یا}\quad ۶\,\text{م}_{\text{ب}} + \text{م}_{\text{ج}} = ۲۳٫۷۵ \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اب دوسرے اور تیسرے فصل پر غور کرو۔ تو

$$\text{م}_{\text{ب}} \times ۱۰ + ۲\,\text{م}_{\text{ج}} \times ۲۵ + \text{م}_{\text{د}} \times ۱۵ = \frac{۱}{۴}\left\{ ۱۰^{۳} \times \frac{۱۵}{۱۰} + ۱۵^{۳} \times \frac{۱}{۱۵} \right\}$$

سرا د آزادانہ سہارا ہوا ہے، اِس لیے $\text{م}_{\text{د}} = ۰$

$$\therefore\ ۱۰\,\text{م}_{\text{ب}} + ۵۰\,\text{م}_{\text{ج}} = \frac{۵^{۳}}{۴}\left\{ ۱۲ + ۱۸ \right\}$$

$$\text{یا}\quad \text{م}_{\text{ب}} + ۵\,\text{م}_{\text{ج}} = ۹۳٫۷۵ \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہمزاد مساواتوں (۱) اور (۲) کو حل کرنے سے

$$\text{م}_{\text{ب}} = ۳۴٫۷۵$$

$$\text{م}_{\text{ج}} = ۱۱٫۲$$

$\therefore$ اِن قیمتوں کو قائم کرنے سے خماؤ کے معیار کا وہ نقشہ حاصل ہوتا ہے جو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

جز کا نقشہ حاصل کرنے کے لیے پہلے ردِ عملوں کا حساب یہ ہوگا:—

$$ر_ا = \frac{ب_۱ ل_۱}{۲} + \frac{م_ا - م_ب}{ل_۱} = \frac{۲۰}{۲} - \frac{۳۶٫۷۵}{۲۰} = ۸٫۱۱ \text{ ٹن}$$

$$ر_ب = \frac{۲۰}{۲} + \frac{۳۶٫۷۵}{۲۰} + \frac{۱۵}{۲} + \frac{۲۶٫۵۵}{۱۰} = ۱۱٫۸۹ + ۱۰٫۱۵ = ۲۲٫۰۴ \text{ ٹن}$$

$$ر_ج = \frac{۱۵}{۲} + \frac{۲۶٫۵۵}{۱۰} + \frac{۱۰}{۲} + \frac{۱۱٫۲۰}{۱۵} = ۴٫۸۵ + ۵٫۷۴ = ۱۰٫۵۹ \text{ ٹن}$$

$$ر_د = \frac{۱۰}{۲} - \frac{۱۱٫۲۰}{۱۵} = ۴٫۲۶ \text{ ٹن}$$

حاصل جمع ۴۵ ٹن

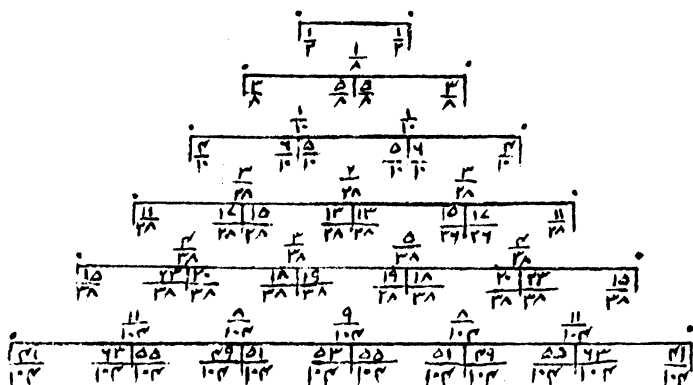
اس سے جز کا وہ نقشہ حاصل ہوگا جو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ شہتیر کے مسلسل ہونے سے صرف اساسی خط بدلینگے۔ منحنیوں کی شکل نہیں بدلیگی۔

اگر فصل تین سے زیادہ ہوں تو دو دو متصل فصل لیے جائینگے اور تین معیاروں کے مسئلے سے مساواتوں کا ایک سلسلہ حاصل ہوگا۔

مزید عددی مثالیں اس باب کے آخر میں ملینگی۔

ثابت سروں کے مسلسل شہتیر —— اگر ایک مسلسل شہتیر کا ایک سرا ثابت ہو تو سرے کے خماؤ کا معیار اس طرح حاصل ہوگا کہ اس ثابت سرے کے دوسری جانب اس شہتیر کو مسلسل تصور کیا جائے اور فرض کیا جائے کہ دوسری جانب کا حصّہ ہر لحاظ سے بالکل اصلی حصے کی طرح ہے۔ کیونکہ سرے کو ثابت کرنے سے شہتیر اس مقام پر افقی ہو جاتا ہے، اور افقی وضع ایک متشاکل مسلسل شہتیر کے وسط میں واقع ہوتی ہے۔ اس کی ایک مثال اس باب کے آخر میں حل کی ہوئی مثالوں میں ملیگی۔

مساوی فصل اور ان پر مستقل یکساں بوجھ —— عملاً فصل (ل) عموماً مساوی ہوتے ہیں اور یکساں بوجھ (ب) فی طولی فٹ مستقل ہوتا ہے اور انتہائی سرے

آزادانہ سہارے ہوئے ہوتے ہیں۔ شکل ۱۰۶ میں ایک نقشہ دکھایا گیا ہے جس سے سہاروں کے معیار اور ردِّ عمل چھ فصل تک کے شہتیر کے لیے معلوم ہو سکتے ہیں۔

شکل ۱۰۶۔ مساوی فصلوں کے یکساں لدے ہوئے مسلسل شہتیروں کے خ۔م اور ردِّ عمل

فصل کے خطوط کے اوپر جو اعداد ہیں وہ سہاروں کے معیاروں کے عددی سر ہیں جن کو ب ل۲ سے ضرب دینا چاہیے۔

فصل کے خطوط کے نیچے ردِّ عملوں کے عددی سر ہیں جن کو ب ل سے ضرب دینا چاہیے۔

اِن سے خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے آسانی سے کھینچے جا سکتے ہیں۔ طالب علم تین معیاروں کے مسئلے کے ذریعے اس نقشے کی تصدیق کر لیں۔

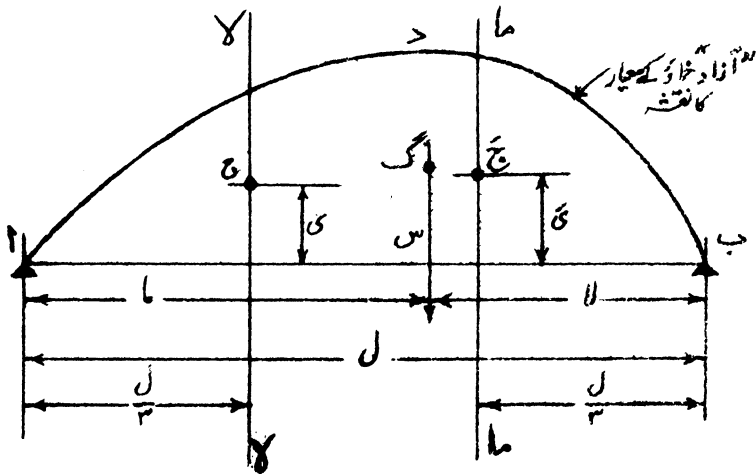
ثابت اور مسلسل شہتیروں کے خصوصی نقاط

یہ طریقۂ حل جس کو "خصوصی نقاط" کا طریقہ کہا جاتا ہے پہلے پروفیسر کلیکسٹن فِڈلر (T. Claxton Fidler) نے ۱۸۸۳ء میں پیش کیا۔ اِس کی طرف طلبہ نے کماحقہ توجہ نہیں کی اور اس کی وجہ یہ ہے کہ اکثر

درسی کتابوں میں اس کو شامل نہیں رکھا گیا ہے لیکن حال میں ڈاکٹر سامن (Dr. Salmon) نے انسٹی ٹیوشن آف سول انجینیرز کے سامنے جو ایک پرچہ "خصوصی نقاط" کے عنوان سے پیش کیا تو اس مضمون میں نئے سرے سے دلچسپی لی جانے لگی۔ اس پرچے میں ڈاکٹر سامن نے اس مضمون سے بہت تفصیل کے ساتھ بحث کی ہے اور دکھایا ہے کہ اس طریقے میں فِڈلر کی دکھائی ہوئی وسعت سے زیادہ توسیع کی جاسکتی ہے۔

یہاں ہم اس طریقہ کو ممکنہ طور پر آسان پیرائے میں بیان کرینگے تاکہ اُن طلبہ کے لیے ایک تمہید کا کام دے جو اس مضمون کا مزید مطالعہ کرنا چاہیں۔

خصوصی نقطہ کیا ہے؟ فرض کرو کہ ا د ب (شکل ۱۰۶ ا) فصل ل کے ایک شہتیر ا ب پر "آزاد" خاؤ کے معیار کے نقشے کو تعبیر کرتا ہے۔

شکل ۱۰۶ ا

"آزاد" خاؤ کے معیار کے نقشے سے مراد وہ نقشہ ہے جو دیے ہوئے لداؤ کے تحت اس شہتیر پر آزاد سِروں کی صورت میں بنتا۔ دونوں سروں سے ل/۳ کے فاصلے پر انتصابی خطوط لا لا اور ما ما کھینچو۔ اِن خطوط کو

"تہائی خطوط" کہا جائیگا۔

اب فرض کرو کہ آزاد نقشے ا د ب کا رقبہ س ہے، اور اس کا مرکزِ ہندسی گ سروں ا اور ب سے فاصلوں ما اور لا پر ہے۔

تہائی خطوط پر اساسی خط ا ب سے ایسے فاصلوں ی اور یَ پر نقاط ج اور جَ لو کہ

$$ی = \frac{۲س \times لا}{ل^۲} \qquad (۷)$$

$$یَ = \frac{۲س \times ما}{ل^۲} \qquad (ما)$$

تو نقاط ج اور جَ "خصوصی نقطے" ہونگے۔

خاص صورتوں میں خصوصی نقطوں کا محل

(۱) یکساں بوجھ و ـــــ اس صورت میں آزاد نقشہ ایک مکافی ہوگا جس کا ارتفاع = $\frac{و ل}{۸}$، مکافی کا رقبہ س = $\frac{۲}{۳}$ ل × $\frac{و ل}{۸}$ = $\frac{و ل^۲}{۱۲}$، اور فاصلے ما اور لا دونوں $\frac{ل}{۲}$ ہونگے۔

$$\therefore ی = یَ = ۲ \times \frac{و ل^۲}{۱۲} \times \frac{ل}{۲ ل^۲} = \frac{و ل}{۱۲}$$

$$= \frac{۲}{۳} \times \text{آزاد نقشے کا ارتفاع}$$

(۲) مرکزی بوجھ = و ـــــ اس صورت میں آزاد نقشہ ایک مثلث ہوگا جس کا ارتفاع = $\frac{و ل}{۴}$، اور اس کا رقبہ = $\frac{ل}{۲} \times \frac{و ل}{۴} = \frac{و ل^۲}{۸}$،

اور ما اور لا دونوں = $\frac{ل}{۲}$

$$\therefore ی = یَ = ۲ \times \frac{و ل^۲}{۸} \times \frac{ل}{۲ ل^۲} = \frac{و ل}{۸}$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \text{آزاد نقشے کا ارتفاع}$$

ل
ل/۳
ل/۳
ل/۳
۱
ج
ج
ھ = ول/۸
۲ھ/۳ = ول/۱۲
۲ھ/۳ = ول/۱۲
۲
ج
ج
ھ = ول/۴
ھ/۲ = ول/۸
ھ/۲ = ول/۸
و
ل/۲
۳
ج
ج
ھ = ول/۳
۲ھ/۳ = ۲ول/۹
۲ھ/۳ = ۲ول/۹
و
و

شکل ۱۰۶ اب

شکل ۱۰۶ ب

(۳) دو بوجھ و تہائی نقطوں پر ـــــ اِس صورت میں آزاد نقشہ شکل ۱۰۶ ب (۳) کے مطابق ہوگا۔

نقشے کا ارتفاع = $\frac{و ل}{۳}$ اور اس کا رقبہ

$$س = \frac{۱}{۲} \times \frac{ل}{۳} \times \frac{و ل}{۳} + \frac{ل}{۳} \times \frac{و ل}{۳} + \frac{۱}{۲} \times \frac{ل}{۳} \times \frac{و ل}{۳}$$

$$= \frac{۲ و ل^۲}{۹}$$

ما اور لا دونوں $= \frac{ل}{۲}$

$$\therefore ی = یٔ = ۲ \times \frac{۲ و ل^۲}{۹} \times \frac{ل}{۲ ل^۲} = \frac{۲ و ل}{۹}$$

$= \frac{۲}{۳} \times$ آزاد نقشے کا ارتفاع

(۴) غیر مرکزی بوجھ و ـــــ اِس صورت میں آزاد نقشہ (شکل ۱۰۶ ب (۴)) ایک مثلث ہوگا جس کا ارتفاع $= \frac{و ا ب}{ل}$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ل}}{۲} \times \frac{\text{و ا ب}}{\text{ل}} = \frac{\text{و ا ب}}{۲}$$

$$\text{ما} = \frac{\text{ل}}{۲} + \frac{۱}{۳}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{ب}\right) = \frac{۲\text{ل}}{۳} - \frac{\text{ب}}{۳} = \frac{۲\text{ا} + ۲\text{ب} - \text{ب}}{۳}$$

$$= \frac{۲\text{ا} \times \text{ب}}{۳} = \frac{\text{ا} + \text{ا} + \text{ب}}{۳} = \frac{\text{ل} + \text{ا}}{۳}$$

اسی طرح $\text{لا} = \frac{\text{ل} + \text{ب}}{۳}$

$$\therefore \text{ی} = \frac{\text{و ا ب}\,(\text{ل} + \text{ا})}{۳\,\text{ل}^۲}$$

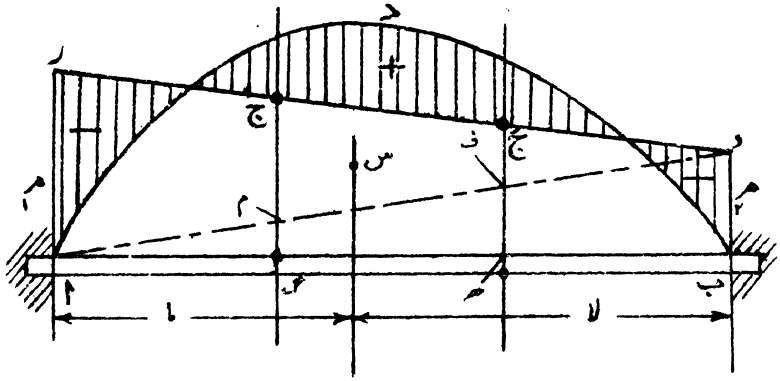
$$\text{یَ} = \frac{\text{و ا ب}\,(\text{ل} + \text{ب})}{۳\,\text{ل}^۲}$$

اِن ضابطوں سے خصوصی نقاط ج ، جَ حاصل ہونگے۔

اس کا اطلاق ثابت شہتیروں پر ــــــ مور (Mohr) کے مسئلے میں ذرا ترمیم کرکے یہ اصول قایم کیا جاسکتا ہے کہ اگر کسی شہتیر پر کے خماؤ کے معیار کے نقشے کو ایک خیالی بوجھ کا نقشہ سمجھا جائے تو حاصل ہونے والی خیالی جزی قوت (× آ ے) سے کسی نقطے پر شہتیر کا ڈھال حاصل ہوگا۔ اِس اصول کی رُو سے ثابت شہتیر میں دونوں سروں پر خیالی ردِّ عمل صفر ہونا چاہیے کیونکہ دونوں سروں پر ڈھال صفر ہے۔

شکل ۱۰۶ ج میں ایک ثابت شہتیر دکھایا گیا ہے جس پر کے بوجھ سے آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر پر خماؤ کے معیار کا نقشہ ا د ب (+) پیدا ہوتا۔ سروں کی تثبیت سے منفی یا معکوس معیار $\text{م}_۱$ اور $\text{م}_۲$ پیدا ہوتے ہیں جن سے منفی خماؤ کے معیار کا نقشہ ا ر د ب پیدا ہوتا ہے۔ کسی نقطے پر حقیقی خماؤ کا معیار دونوں نقشوں کے فرق سے حاصل ہوگا جس کو سایہ دار دکھایا گیا ہے۔

اب ہم ثابت کرینگے کہ خط ر د دونوں خصوصی نقطوں ج اور جَ میں سے گزرتا ہے۔

شکل ۱۰۶ ج

اس کے لیے خط ا د کھینچو جس سے معکوس نقشہ دو مثلثوں ا ر د اور ا د ب میں بٹ جائیگا جن کے مرکزِ ہندسی تہائی خطوط پر واقع ہونگے۔

سرے ا پر خیالی جزق معلوم کرنے کے لیے نقطہ ب کے گرد معیار لو۔ اس سے

$$ق_۱ \times ا = س \times لا - \triangle ا ر د کا رقبہ \times \frac{۲ ل}{۳}$$

$$- \triangle ا د ب کا رقبہ \times \frac{ل}{۳}$$

$$= س \times لا - \frac{م_۱ \times ل}{۲} \times \frac{۲ ل}{۳} - \frac{م_۲ \times ل}{۲} \times \frac{ل}{۳}$$

$$= س \times لا - \frac{(۲ م_۱ + م_۲) ل^۲}{۶} \qquad \text{(۱)}$$

چونکہ ق۱ صفر ہے اس لیے

$$(۲ م_۱ + م_۲) = \frac{۶ س لا}{ل^۲} \qquad \text{(۲)}$$

اِسی طرح ا کے گرد معیار لینے سے یہ حاصل ہوگا:۔

$$(م_1 + ۲م_۲) = \frac{۶ س ما}{ل_۲} \quad \text{.........} \quad (۳)$$

اب گ ج = گ م + م ج

$$= \frac{م_۲}{۳} + \frac{۲ م_1}{۳}$$

$$= \frac{1}{۳}(۲م_1 + م_۲)$$

$$= \frac{1}{۳}\ \frac{۶ س \times لا}{ل_۲} \qquad \text{مساوات (۲) سے}$$

$$= \frac{۲ س \times لا}{ل_۲}$$

اور ربط (۷) سے یہی خصوصی نقطہ ج کی بلندی ی ہے۔

اِسی طرح حاصل ہوگا کہ

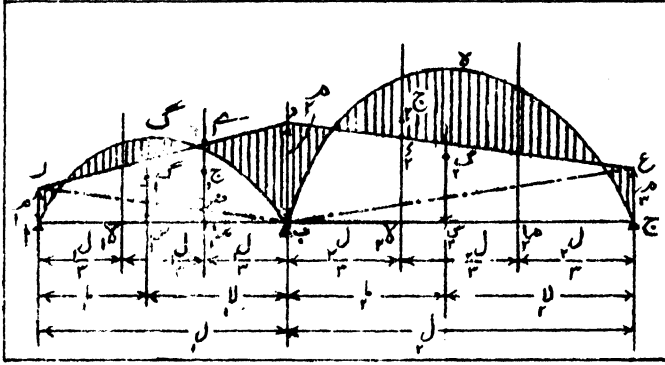
$$ل جَ = \frac{۲ س \times ما}{ل_۲} = یَ$$

اطلاق مسلسل شہتیروں پر ——— فرض کرو کہ ا، ب، ج تین متصل سہارے ایک مسلسل شہتیر کے ہیں جس پر آزاد خماؤ کے معیار کے نقشے ا گ ب اور ب ک ج ہیں۔

فرض کرو کہ فصل $ل_1$، $ل_۲$ ہیں اور آزاد نقشوں کے رقبے $س_1$، $س_۲$ ہیں اور اِن کے مرکزِ ہندسی $گ_1$، $گ_۲$ ہیں۔

شہتیر کے تسلسل کا یہ اثر ہوگا کہ سہاروں پر معکوس معیار $م_1$، $م_۲$، $م_۳$ عمل کرینگے اور مسلسل شہتیروں کی بحث میں ساری دِقت اِن ہی معکوس معیاروں کو

معلوم کرنے کی ہے۔ جوں ہی کہ یہ معلوم ہو جائیں خطوط ر د اور د ع کھینچے جا سکتے ہیں

شکل ۱۰۶ء د

جن سے خماؤ کے معیار کا مکمل نقشہ حاصل ہو گا جو کہ سایہ دار دکھایا گیا ہے۔ مسلسل شہتیر میں ضروری شرط یہ ہے کہ کسی سہارے پر شہتیر کا ڈھال وہی حاصل ہونا چاہیے خواہ وہ ایک فصل کے ختم کے لیے محسوب کیا جائے یا دوسرے فصل کے شروع کے لیے۔

اب سہارے ب پر خیالی جز $ق_۲$ محسوب کرو۔ یہ اس نقطے پر کے ڈھال کے متناسب ہو گا جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں۔

پہلے فصل ا ب کو لے کر ا کے گرد معیار لو۔ اس سے

$س_۱ \times ل_۱ = س_۱ ما_۱ -$ △ ا ر ب کا معیار $-$ △ ر د ب کا معیار

$$= س_۱ ما_۱ - \frac{م_۱ ل_۱}{۲} \times \frac{ل_۱}{۳} - \frac{م_۲ ل_۱}{۲} \times \frac{۲ ل_۱}{۳}$$

$$\therefore ق_۲ = \frac{س_۱ ما_۱}{ل_۱} - \frac{(م_۱ + ۲ \times م_۲)}{۳} \frac{ل_۱}{۲} \quad \text{......... (۴)}$$

اب اگر تہائی خط $ما_۱$ سے پر خصوصی نقطہ $ج_۱$ ہو تو ربط (ما) سے

$$ما_۱ ج_۱ = \frac{۲ س_۱ ما_۱}{ل_۱}$$

یا $\dfrac{\text{س}_۱\ \text{ما}}{\text{ل}_۱} = \dfrac{\text{ما}\ \text{ج}_۱}{۲} \times \text{ل}_۱$

اور $\text{ما}\ \text{ے}_۱ = \dfrac{\text{م}}{۲}\ \text{ما}\ \text{ف} + \text{ف}\ \text{م}$

$= \dfrac{\text{م}}{۲} + \dfrac{۲\text{م}}{۳}$

اِس لیے اِن نتائج کو (۴) میں درج کرنے سے

$\text{س}_۱ = \dfrac{\text{ما}\ \text{ج}_۱}{۲} \times \text{ل}_۱ - \dfrac{\text{ما}\ \text{ے}\times\text{ل}_۱}{۲}$

$= - \dfrac{\text{ج}_۱\ \text{ے}}{۲} \times \text{ل}_۱$ .... (۵)

اب اگر فصل ب ج پر غور کیا جائے اور نقطہ ج کے گرد معیار لیے جائیں تو اسی طرح کے استدلال سے جس کی طلبہ تصدیق کریں یہ حاصل ہوگا:—

$\text{س}_۲ = \dfrac{\text{ج}_۲\ \text{ے}}{۲} \times \text{ل}_۲$ .... (۶)

علامتیں اس لیے معکوس کردی گئی ہیں کہ معیاروں کی سمت معکوس کردی گئی ہے۔

چونکہ یہ خیالی جز نقطہ ب پر کے ڈھال کو دونوں طرف کے فصلوں کے لحاظ سے تعبیر کرتے ہیں اس لیے مساوی ہونے چاہییں۔ اِس طرح

$- \text{ج}_۱\ \text{ے}_۱ \times \text{ل}_۱ = \text{ج}_۲\ \text{ے}_۲ \times \text{ل}_۲$ .... (۷)

اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی سہارے کے دونوں بازوؤں کے خصوصی نقطے معکوس خماؤ کے معیار کے خطوط ر د اور د ع کی مخالف جانبوں میں ہونگے (یعنی ایک اوپر ہوگا تو دوسرا نیچے) اور اوپر اور نیچے ان کے فاصلے فصلوں کے معکوس تناسب میں ہونگے۔

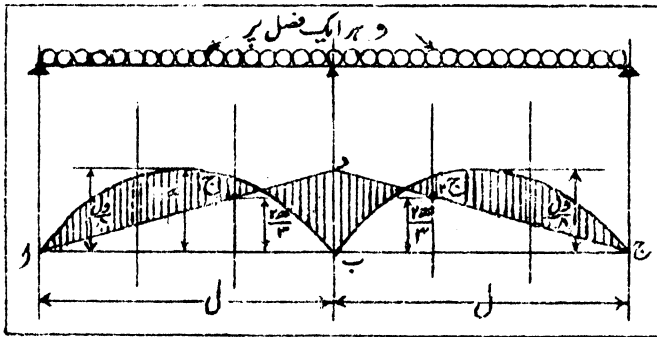
اگر دونوں متصل فصل مساوی ہوں تو یہ حاصل ہوتا ہے کہ فاصلے ج۱ ے۱ اور ج۲ ے۲ مساوی ہونگے۔ اوپر کی بحث کسی قدر پیچیدہ معلوم ہوگی

لیکن اس طریقے کا عملاً استعمال بہت آسان ہے یہاں تک کہ پیچیدہ صورتیں بھی نقشہ کشی کے تختے پر چند آزمائشی خطوط کی مدد سے چند منٹوں میں حل کر لی جا سکتی ہیں۔ اس کے برخلاف معمولی طریقوں سے حل کرنے میں بہت دیر لگتی ہے۔

خصوصی نقطے کے طریقے سے غلطی زیادہ نہیں ہو سکتی خاص کر جب اس امر کو مدِنظر رکھا جائے کہ مسلسل شہتیر کے نظریے میں جو مفروضات اختیار کیے گئے وہ ایسے ہیں کہ بہت زیادہ صحت کی کوشش کرنا بے سود ہے۔

مثالیں

(۱) دو مساوی فصل مساوی طور پر لدے ہوئے (شکل ۱۰۶ع)۔
یہ سادہ ترین صورت ہے جو ممکن ہے۔

شکل ۱۰۶ ع

سرے ا اور ج سادہ طور پر سہارے ہوئے ہیں اس لیے ان نقاط پر معکوس خماؤ کے معیار صفر ہونگے اور معکوس خماؤ کے معیار کے خط ا د ج کو خصوصی نقطہ ج کے اتنا اوپر سے گزرنا چاہیے جتنا خصوصی نقطہ ج کے نیچے سے گزرتا ہے۔

یہ اسی طرح ممکن ہے کہ معکوس خماؤ کے معیار کا خط خصوصی نقطوں میں سے گزرے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

(۲) ایک مسلسل شہتیر کے دو فصل ہیں ۴۰ فٹ اور ۲۰ فٹ اور

دونوں کے مرکزوں پر ۱۰ ٹن کا ایک بوجھ ہے۔

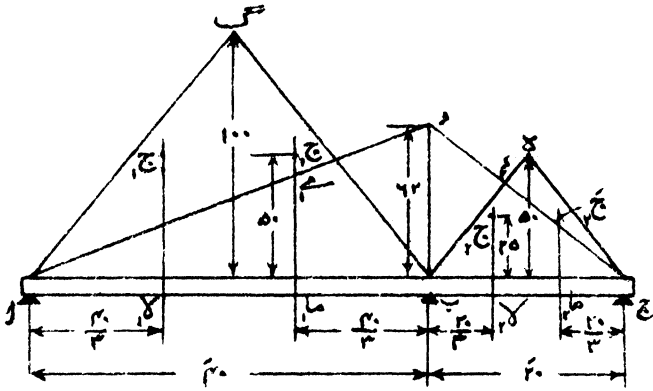
دیکھو شکل ۱۰۶ ف۔ پہلے آزاد خماؤ کے معیار کے نقشے کھینچو جو مثلث و گ ب اور ب ۵ ج ہونگے۔ پہلے کا ارتفاع

$$\frac{۴۰ \times ۱۰}{۴} = ۱۰۰ \text{ فٹ ٹن}$$

اور دوسرے کا

$$\frac{۱۰ \times ۲۰}{۴} = ۵۰ \text{ فٹ ٹن}$$

ہوگا۔

جیسا کہ شکل ۱۰۶ ب (۲) میں دکھایا گیا ہے مرکزی بوجھ کے شہتیر کے لیے خصوصی نقاط کی بلندی $\frac{\text{ڈ ل}}{۸}$، یعنی آزاد خماؤ کے معیار کے مثلث کے ارتفاع کا نصف ہوگی۔

شکل ۱۰۶ ف

اِس لیے خصوصی نقاط ج، ج َ کو ۵۰ فٹ ٹن کی بلندی پر اور ج، ج َ کو ۲۵ فٹ ٹن کی بلندی پر قائم کرو۔

چونکہ فصل د ب فصل ب ج کا دگنا ہے اِس لیے فاصلہ ج، د فاصلہ ج َ سے کا دگنا ہونا چاہیے۔

اب چونکہ یہ معلوم ہے کہ سہاروں کے معیار کا نقشہ ا اور ج میں سے گزرنا چاہیے اس لیے آزمایش کے طور پر ا اور ج کو ایک ایسے نقطہ د سے ملاؤ کہ یہ خط ما ہیں کے تہائی خط کو ج سے اُس فاصلے کے نصف کے بقدر اوپر یا نیچے قطع کرے جس کے بقدر کا ہ تہائی خط کو ج ہ کے نیچے یا اوپر قطع کرے۔

آزمایش کے ذریعے آخر نقطہ د حاصل ہوگا جس سے سہارے کا معیار ۲۲ فٹ ٹن حاصل ہوتا ہے۔

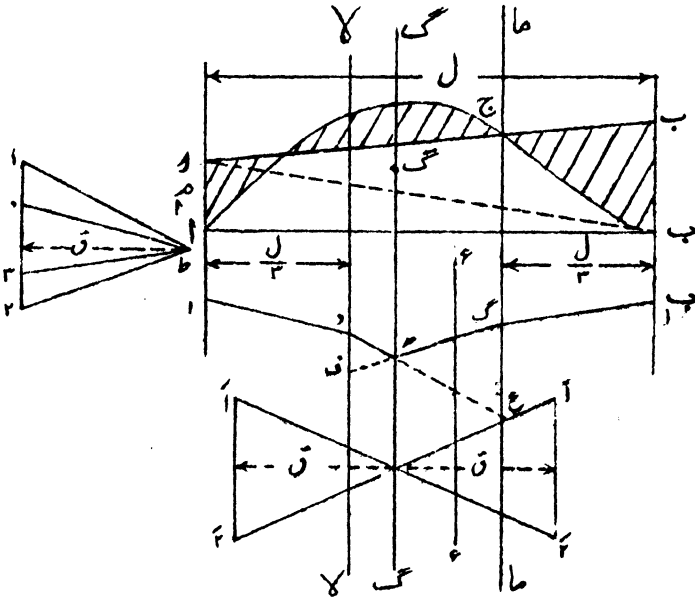
اِس طریقے کا بڑا فائدہ یہ ہے کہ اس سے حاصل ہونے والے نتائج عملی اغراض کے لیے کافی صحیح ہوتے ہیں اور عمل ہندسی شکل میں آنکھوں کے سامنے رہتا ہے جس کی وجہ سے غلطی بہت زیادہ نہیں ہوسکتی۔

طلبہ سے سفارش کی جاتی ہے کہ اِس طریقے کو اُن مثالوں پر آزمائیں جو تین معیاروں کے طریقے سے حل کی گئی ہیں۔

مسلسل شہتیروں کی ترسیمی بحث

فصل بہت سے ہوں اور لداؤ بے قاعدہ ہو تو تین معیاروں کے مسئلے کا استعمال کسی قدر دِقت طلب ہوجاتا ہے۔ ذیل میں ایک ترسیمی طریقہ دیا جاتا ہے جو کسی قدر پیچیدہ ہے اور اس کو سمجھانے میں وقت صرف ہوتا ہے لیکن دلچسپی سے خالی نہیں اور کارآمد ہے اور اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ترسیمی بحث کو کس حد تک کام میں لایا جاسکتا ہے۔

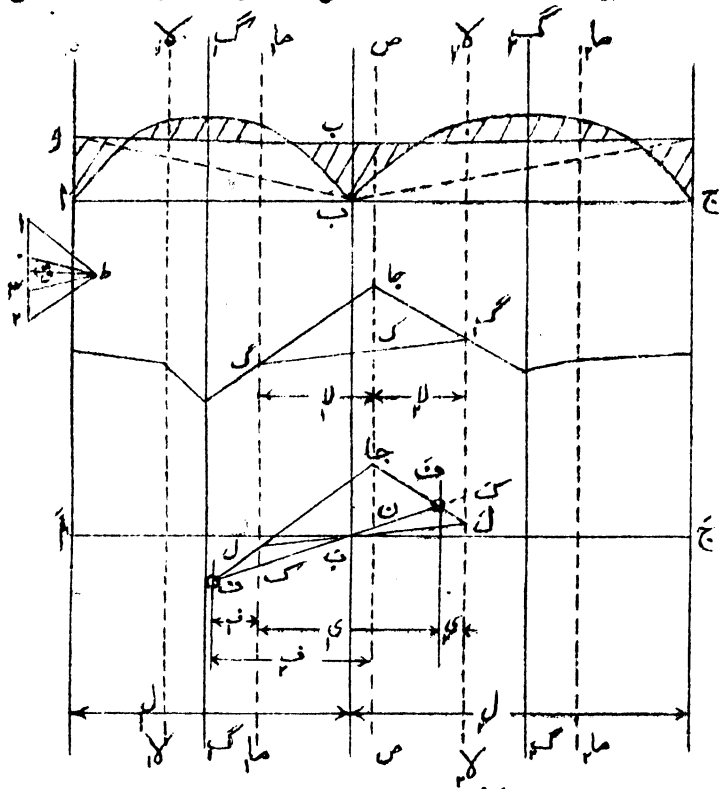
مور (Mohr) کے مسئلے کی خیالی طناب پر غور کرو جو شہتیر کے لچک کے خط کو تعبیر کرتی ہے۔ یہ ایک رسیمانی کثیر الاضلاع ہے جو خماؤ کے معیار کے نقشے کو لداؤ سمجھ کر اور قطبی فاصلہ آ × سے لے کر کھینچا جائے۔

کسی رسیمانی کثیر الاضلاع کے پہلے اور آخری ضلع کا ڈھال اور محل قوتوں کی تقسیم پر بالکل منحصر نہیں ہوتے بشرطیکہ ان تمام تقسیموں میں حاصل کی مقدار اور سمت وہی رہے۔

شکل ع۱۰۰ مسلسل شہتیر۔ ترسیمی عمل

یہ بات باب ۳ کی شکل پر موجودہ ساخت کے سلسلے میں غور کرنے سے واضح ہوجائیگی۔

جیساکہ آگے چل کر دکھایا جائیگا اگر سہاروں پر لچک کے خط کے مماس معلوم ہوجائیں تو سہاروں پر کے معیار معلوم ہوجائینگے۔ فرض کرو کہ ا ب (شکل ۱۰۰) ایک مسلسل شہتیر کے ایک فصل کو تعبیر کرتا ہے جس کا طول ل ہے اور فرض کرو کہ اس پر کے لدائو کے آزاد خمائو کے معیار کا نقشہ ا ج ب ہے اور ا ؤ اور ب ب سہاروں کے معیاروں م ا اور م ب کو تعبیر کرتے ہیں۔ اگر نقشے ا ج ب کا مرکز ہندسی گ ہو تو انتصابی خط گ گ کو مماکز ہندسی کا انتصابی خط کہا جاتا ہے، اور اگر سہاروں کے معیاروں کے نقشے کو دو مثلثوں ا و ب اور ب و ب میں تقسیم کیا جائے تو ان مثلثوں کے رقبے دائیں اور بائیں ثلث کے خطوط لا لا اور ما ما میں عمل کرینگے۔ اب لچک کا خط

معلوم کرنے کے لیے خماؤ کے معیار کے حقیقی منحنی کو منفرد قوتوں میں بدل دو جو

شکل ۱۰۰۱ - مسلسل شہتیر ـــ ثابت نقطے

خطوط گ گ، لا لا، ما ما میں اوپر یا نیچے کو عمل کریں۔

ایک سمتی خط پر حسب ذیل قایم کرو:-

۱، ۲ = آزاد خماؤ کے معیار کے نقشے ا ج ب کا رقبہ = س

۰، ۱ = مثلث ا ا ب کا رقبہ = س ا

۲، ۳ = " ا ب ج " = س ب

پھر اگر قطبی فاصلہ ق = م سے پر قطب ط لے کر (۰، ط) کے متوازی ا ا د، (۱، ط) کے متوازی د ھ، (۲، ط) کے متوازی ھ گ، اور (۳، ط) کے متوازی گ ب ا کھینچا جائے تو د ھ اور ھ گ وسطی ضلع کہلاتے ہیں،

اور ا، د اور گ ب، سہاروں پر کے مماس ہو نگے۔

اب ہمارے مسئلے میں ہم کو نقاط ۰ اور ۳ کے محل معلوم نہیں اور ان کے محل معلوم ہو جائینگے اگر وسطی ضلع معلوم ہو جائیں۔ اس لیے سوال ان وسطی ضلعوں کے معلوم کرنے کا رہ جاتا ہے۔

مرکز ہندسی میں کے انتصابی خط گ گ کے دونوں طرف فاصلہ ق پر خطوط کھینچو اور ان پر طول اَ ۲َ = ۱، ۲ قایم کرو اور سروں کو چلیپے وار ملاؤ۔ یہ مرکز ہندسی میں کے انتصابی خط پر تقاطع کرینگے۔ یہ خطوط چلیپائی خطوط کہلاتے ہیں۔

اب کوئی انتصابی خط ۶ ۶ کھینچو۔ تب صریحاً اس انتصابی پر وسطی ضلعوں اور چلیپائی خطوط سے مساوی مقطوعے بنینگے۔ اس سے لازم آتا ہے کہ اگر ایک وسطی ضلع پر ایک نقطہ معلوم ہو جائے تو دوسرے وسطی ضلع پر اس سے انتصاباً نیچے کا نقطہ معلوم ہو جائیگا۔

اب فرض کرو کہ اس فصل کا دایاں وسطی ضلع متصل فصل کے بائیں وسطی ضلع سے نقطہ جا پر ملتا ہے جو انتصابی خط ص ص پر واقع ہے (شکل ۱۰۰)۔

اب مثلثات گ جا ک اور ط ۲، ۳ پر غور کرو۔

$$\frac{\text{جا ک}}{\text{۲، ۳}} = \frac{\text{لا}_1}{\text{ق}} \quad \text{یہ مشابہ ہیں اس لیے}$$

$$\therefore \text{ق} \times \text{جا ک} = \text{۲، ۳} \times \text{لا}_1$$

$$= \text{لا}_1 \times \text{رقبہ ب ا ب}$$

$$= \frac{\text{م}_\text{ب} \text{ل}_1}{2} \times \text{لا}_1$$

اسی طرح مثلث گ، جا ک پر غور کرنے سے

$$\text{ق} \times \text{جا ک} = \frac{\text{م}_\text{ب} \text{ل}_2}{2} \times \text{لا}_2$$

جہاں ل_2 متصل فصل کا طول ہے۔

$$\therefore \quad \text{لا}_1 \text{ل}_1 = \text{لا}_2 \text{ل}_2$$

$$\text{نیز} \quad \text{لا}_1 + \text{لا}_2 = \frac{1}{3}(\text{ل}_1 + \text{ل}_2)$$

$$\therefore \quad \text{لا}_1 = \frac{\text{ل}_2}{3}$$

$$\text{لا}_2 = \frac{\text{ل}_1}{3}$$

∴ ص ص انتصابی ماما سے فاصلہ $\frac{\text{ل}_2}{3}$ پر ہوگا، اور اس لحاظ سے اس کو مقلوب تثلیثی خط کہتے ہیں۔

''ثابت نقطوں'' کی دریافت ——— فرض کرو کہ ا ب ج (شکل ۱۰۸) ایک مسلسل شہتیر کے دو متصل فصل ہیں۔ تثلیثی خطوط کھینچو جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

فرض کرو کہ یہ معلوم ہے کہ فصل ا ب کا دایاں وسطی ضلع ایک ثابت نقطہ ف میں سے گزرتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ وسطی ضلع مقلوب تثلیثی خط ص ص کو جا پر اور تثلیثی خط ماما کو ل پر قطع کرتا ہے۔ تب ل ب ایک سہارے کا ماس ہونا چاہیے۔ ل ب کو خارج کر کے فصل ب ج کے پہلے تثلیثی خط سے لَ پر ملنے دو۔ تب جا لَ بایاں وسطی ضلع ہوگا۔ ف ب کو ملا کر خارج کرو اور جا لَ سے فَ پر ملنے دو۔ تب فَ دوسرے فصل کے وسطی ضلعوں پر ایک ثابت نقطہ ہوگا اس کا ثبوت یہ ہے:—

فرض کرو کہ فَ میں کا انتصابی خط تثلیثی خطوط سے فاصلوں ی۱، ی۲ پر ہے۔
تب چونکہ مثلثات فَ جا ن اور فَ کَ لَ مشابہ ہیں۔

$$\therefore \quad \frac{\text{جا ن}}{\text{کَ لَ}} = \frac{\text{ی}_1 - \frac{1}{3}\text{ل}_2}{\text{ی}_2} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

اور چونکہ مثلثات جب کَ لَ اور جب ک ل مشابہ ہیں۔

$$\therefore \quad \frac{\text{کَ لَ}}{\text{ک ل}} = \frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

نیز مثلثات ف ل ک اور ف جا ن مشابہ ہیں۔

$$\therefore \quad \frac{\text{ک ل}}{\text{جا ن}} = \frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_2} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

(۱)، (۲)، (۳) کو اکٹھے ضرب دینے سے

$$۱ = \frac{\text{ی}_1 - \frac{1}{3}\text{ل}_2}{\text{ی}_2} \times \frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_2} \times \frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ی}_1 - \frac{1}{3}\text{ل}_2}{\text{ی}_2} = \frac{\text{ل}_1\text{ف}_2}{\text{ل}_2\text{ف}_1}$$

$$\text{نیز} \quad \text{ی}_1 + \text{ی}_2 = \frac{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}{۳}$$

$$\therefore \quad \text{ی}_1 - \frac{1}{3}\text{ل}_2 = -\text{ی}_2 + \frac{1}{3}\text{ل}_1$$

$$\therefore \quad \frac{-\text{ی}_2 + \frac{1}{3}\text{ل}_1}{\text{ی}_2} = \frac{\text{ل}_1\text{ف}_2}{\text{ل}_2\text{ف}_1}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ل}_1}{۳\text{ی}_2} = ۱ + \frac{\text{ل}_1\text{ف}_2}{\text{ل}_2\text{ف}_1}$$

$$\therefore \quad \text{ی}_2 = \frac{\frac{1}{3}\text{ل}_1\text{ل}_2\text{ف}_1}{\text{ل}_1\text{ف}_2 + \text{ل}_2\text{ف}_1} = \text{مستقل}$$

∴ ف ایک ثابت نقطہ ہے۔

اِس طریقے سے متعدد ثابت نقاط مختلف فصلوں پر معلوم کیے جا سکتے ہیں جیسا کہ آگے چل کر اور سمجھا جائیگا۔

سروں کے فصلوں میں ثابت نقطہ اس طرح معلوم کیا جاتا ہے :۔

صورت (۱) آزادانہ سہارا ہوا سرا ـــــ سرے کا معیار یہاں صفر ہونا چاہیے اِس لیے سہارے کا مماس اور وسطی ضلع ہم خط ہونے چاہییں۔

اس طرح ا پہلا ثابت نقطہ ہے۔

صورت (۲) دو بستہ یا ثابت سرا ۱ ــــ سہارے کا مماس افقی ہے اس لیے پہلا ثابت نقطہ وہاں ہوگا جہاں ا میں کا افقی خط پہلے تثلیثی خط کو قطع کرے۔

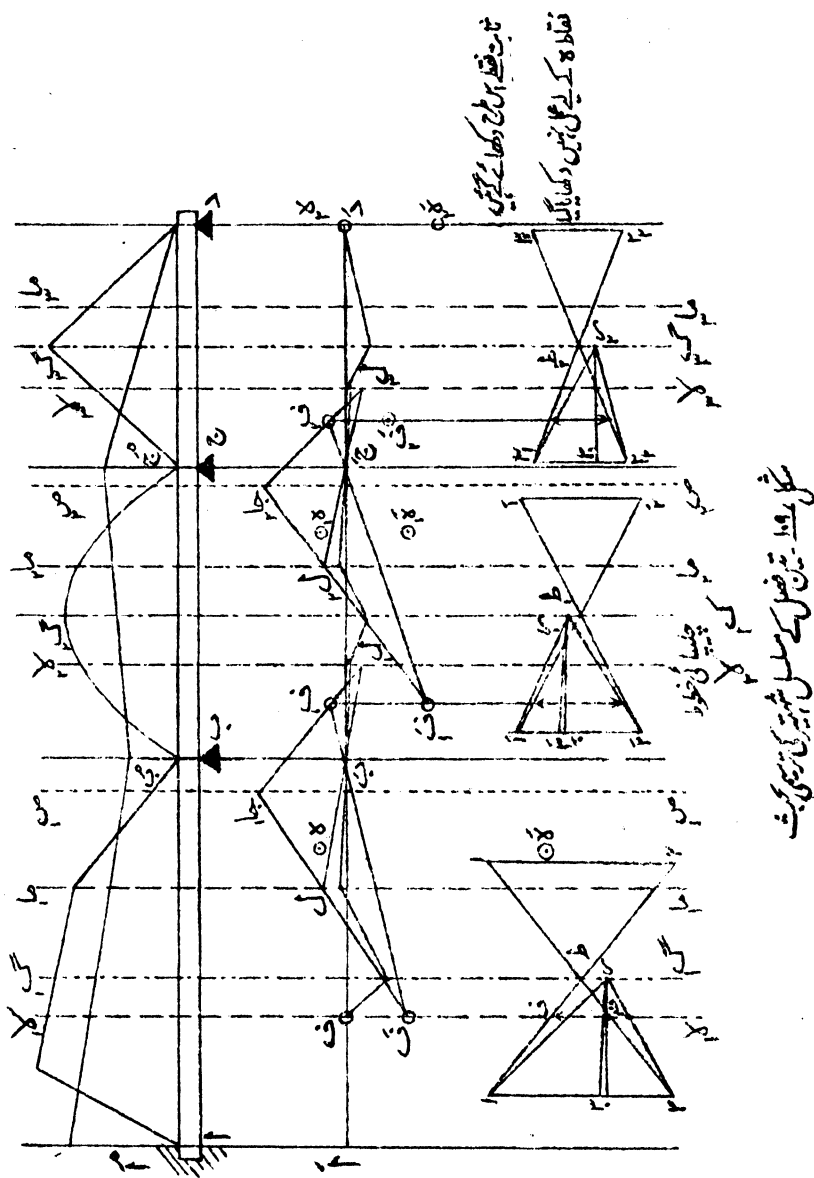
کسی دی ہوئی صورت کے لیے ترسیمی عمل ــــ اب ہم خماؤ کے معیار کا نقشہ حاصل کرنے کا عمل حاصل کر سکتے ہیں جو حسب ذیل ہوگا:۔

آزاد خماؤ کے معیار کا نقشہ، تثلیثی خطوط، مقلوب تثلیثی خطوط اور مراکزِ ہندسی بین کے انتصابی خطوط کھینچو۔ شکل ۱۰۹ء میں تین فصل کا ایک مسلسل شہتیر دکھایا گیا ہے جس کا ایک سرا آزادانہ سہارا ہوا ہے اور دوسرا ثابت ہے۔ لا لا بائیں تثلیثی خطوط کو، ما ما دائیں تثلیثی خطوط کو، ص ص مقلوب تثلیثی خطوط کو، اور گ گ مراکزِ ہندسی بین کے انتصابی خطوط کو تعبیر کرتے ہیں۔

اب چلیپائی خطوط کاغذ کے پائین میں کھینچو۔ یہ خطوط اس طرح حاصل ہونگے کہ مراکزِ ہندسی بین کے انتصابی خطوط کے دونوں طرف آ × ہے کو تعبیر کرنے والے فاصلے سے کسی مناسب کسری فاصلے پر انتصابی خطوط کھینچے جائیں اور ان پر آزاد خماؤ کے معیار کے منحنی کے رقبے س، س، وغیرہ قائم کیے جائیں۔ (آ × ہے کا پیمانہ وہی ہوگا جو رقبوں کا ہو۔ اگر سہاروں کے صرف معیار مطلوب ہوں انصراف مطلوب نہ ہوں اور آ × ہے کی قیمت ہر ایک فصل کے لیے وہی ہو تو آ × ہے کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں۔ اور کوئی مناسب قطبی فاصلہ لیا جا سکتا ہے۔

چلیپائی خطوط کے نقاطِ تقاطع ط، ط، ط ہیں۔

اب ثابت نقطے معلوم کرو۔ سرا ۱ ثابت ہے اس لیے پہلا ثابت نقطہ ف ہوگا۔ اب چلیپائی خطوط کے درمیان کے مقطعے ف ف کے مساوی ف ف قائم کرو اور مقلوب تثلیثی خط تک کوئی خط ف جا کھینچو جو ما ما کو ل پر قطع کرے۔ ل ب کو ملاؤ اور خارج کرکے تثلیثی خط لا لا سے ل پر ملنے دو۔ تب ل جا اور ف ب کے تقاطع سے دوسرے فصل کا ثابت نقطہ ف حاصل ہوگا۔

شکل ۱۰۹ - تین فصل کے مسلسل شہتیر کی ترسیمی حرکت

پھر یہی عمل دہرایا جائے جیسا کہ شکل میں کیا گیا ہے تو نقطے ف، ف، ف حاصل ہونگے۔
اب دوسرے سرے د سے چلو۔ یہ آزادانہ سہارا ہوا ہے اس لیے جیسا کہ ہم بتا چکے ہیں پہلا ثابت نقطہ ک نقطہ د پر ہی واقع ہوگا۔ پھر چلیپائی خطوط کے ذریعے متناظر ثابت نقطہ ک حاصل کرو۔ اور پھر نقاط ف کے لیے جو عمل کیا گیا اس کو دہرانے سے ثابت نقاط ک، ک، ک، ک حاصل ہونگے۔ اب وسطی اضلاع اور سہاروں پر کے مماس کھینچ لو۔ عمل کی صحت کی جانچ دو طرح سے ہو سکتی ہے:۔
(ا) وسطی اضلاع مراکز ہندسی میں کے انتصابی خطوط پر ملنے چاہییں۔
(ب) متصل وسطی ضلع ملائے جائیں تو ان کو سہاروں کے نقاط میں سے گزرنا چاہیے۔
اب چلیپائی خطوط پر کے نقاط ۱، ۲، وغیرہ سے سہاروں پر کے مماسوں کے متوازی خطوط کھینچو اور قطب ۱، ۲، ۳ حاصل کرو اور پھر وسطی ضلعوں کے متوازی خطوط کھینچو جس سے نقاط ۰، ۳، وغیرہ حاصل ہونگے۔ تب

$$م_۲ = \frac{۱۰ \times ۲}{ل_۱}$$

اور اسی طرح۔ اب سہاروں کے معیار قایم کرو۔ اس طرح حقیقی خماؤ کے معیار کا نقشہ حاصل ہو جائیگا۔
مسلسل شہتیر کے سہاروں کے معیار معلوم کرنے کا ایک اور دلچسپ ترسیمی طریقہ ہے جو پروفیسر کلیکسٹن فڈلر نے وضع کیا ہے اور ان کی کتاب پل کی تعمیر میں موجود ہے۔

مسلسل شہتیروں کے فوائد اور نقصانات ــــ مسلسل شہتیروں کے خماؤ کے معیاروں کے نقشے دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ اعظم خماؤ کا معیار کم ہوتا ہے بہ نسبت اس کے کہ ان ہی فصلوں پر سادہ سہارے ہوئے شہتیر علیحدہ علیحدہ رکھ دیے جاتے (سوائے اس صورت کے کہ دو مساوی فصل یکساں لدے ہوئے ہوں اور اس صورت میں مسلسل شہتیر اور علیحدہ شہتیروں کے اعظم معیار مساوی ہوتے ہیں)

اور یہ کہ اعظم معیار بیل پایوں پر واقع ہوتے ہیں۔ مسلسل شہتیروں کے بڑے نقائص جو بیان کیے جاتے ہیں یہ ہیں —

(ا) تمام سہاروں کے ایک ہی سطح میں رہنے کا یقین نہیں کیا جا سکتا۔

(ب) زور محسوب کرنے کے طریقے میں شہتیر کی تراش کو یکساں فرض کیا گیا ہے۔ یہ کفایت کے منافی ہے۔

محکم کنکریٹ میں یہ نقائص اب پیش نہیں کیے جاتے اور محکم کنکریٹ کے شہتیر تقریباً ہمیشہ مسلسل بنائے جاتے ہیں۔

(ا) کے متعلق کم از کم متعدد اشیاء میں مصنف کا خیال ہے کہ اگر لیول کسی قدر بدل بھی جائیں تو شہتیر میں ان نئے حالات کی مناسبت سے ایک مستقل خم پیدا ہو جائیگا اور زور اپنی آپ ترتیب کر لینگے۔

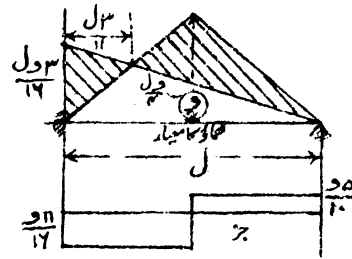
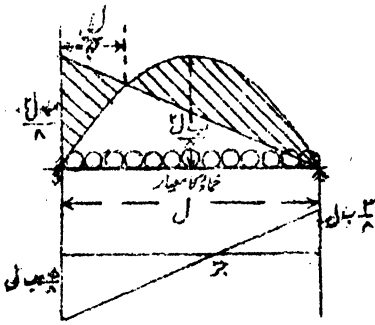
(ب) کے متعلق اکثر ماہرین کا خیال ہے کہ اس طرح جو غلطی واقع ہوگی وہ اتنی بڑی نہیں ہوگی کہ حسابات کو غلط ٹھہرائے۔

یہ دونوں نقائص اس طرح دور ہو سکتے ہیں کہ نقاطِ انعطاف پر شہتیر کو قطع کر دیا جائے اور وسطی حصوں کو سہاروں پر کے حصوں یا برآمدہ بیریوں پر ٹکایا جائے۔ برآمدہ بیری گرڈر پل کا یہی اصول ہے اور بڑے فصل کے پلوں میں کامیاب ثابت ہوا ہے۔ فصل بڑا ہو تو شہتیر کے ذاتی وزن کا اضافی اثر زیادہ ہوتا ہے یہاں تک کہ ایک فصل ایسا آتا ہے جس پر سادہ سہارے ہوئے شہتیر کا استعمال ناممکن ہو جاتا ہے کیونکہ اس کے ذاتی وزن سے پیدا ہونے والے زور جائز زور کی حد سے بڑھ جاتے ہیں۔ برآمدہ بیری گرڈر پل کی صورت میں اعظم معیار سہاروں پر آتا ہے اور ان مقامات پر خماؤ کا معیار بڑھائے بغیر مضبوطی کو بڑھانا آسان ہے۔ اس کی بہترین مثالوں میں سے ایک فورتھ (Forth) کا پل ہے جس کا بیان بہت سبق آموز اور دلچسپ ہوگا اور جن طلبہ کو بڑے فصل کے پلوں کی تجویز میں دلچسپی ہو وہ اس کا مطالعہ کریں۔

موافق حالات کے تحت مسلسل شہتیروں کا استعمال بڑی کفایت کا موجب ہوتا ہے لیکن برطانوی مجوز ان کے عام نقصانات کا خیال کر کے عام طور پر

ان کا استعمال نہیں کرتے۔

شہتیر جو ایک سرے پر ثابت اور دوسرے پر آزادانہ سہارے ہوئے ہوں

ہوئے ہوں ـــــ اگر ایک شہتیر کا ایک سرا ثابت اور دوسرا آزادانہ سہارا ہوا ہو تو خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے وہی ہونگے جو ایک ایسے مسلسل شہتیر کے نصف کے ہوتے جس کے دو مساوی فصل ہوں اور لداؤ اسی طرح کا ہو جس طرح کا زیرِ بحث شہتیر میں ہے۔

شکل ۱۵۰ و ۱۵۱ شہتیر جو ایک سرے پر ثابت اور دوسرے پر سہارے ہوئے ہوں

اس کی وجہ یہ ہے کہ سرے کو ثابت کرنے سے وہ افقی ہو جاتا ہے اور مساوی فصلوں اور ایک جیسے لداؤ کے دو فصلوں کے شہتیر کے وسطی سہارے پر بھی ہوتا ہے۔ ذیل کی دو معیاری صورتوں پر غور کرنے سے یہ واضح ہو جائیگا۔

(ا) ایک سرا ثابت، دوسرا آزادانہ سہارا ہوا، بوجھ یکساں۔ اس صورت میں خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے وہی ہونگے جو اس مسلسل شہتیر کے ایک فصل کے تھے جس پر ہم نے سب میں پہلے غور کیا ہے۔ یہ نقشے شکل ۱۵۰ میں دکھائے گئے ہیں۔

(ب) ایک سرا ثابت، دوسرا آزادانہ سہارا ہوا، بوجھ مرکزی۔ فرض کرو کہ مرکزی بوجھ و ہے اور فصل ل ہے۔

تب، اگر ب ثابت سرا ہو اور ا آزادانہ سہارا ہوا اور اَ خیالی آزادانہ سہارا ہوا سرا جو ثابت سرے کے دوسری جانب ہے تو تین معیاروں کے مسئلے سے

$$\text{م}_{\text{اَ}}\,\text{ل} + ۲\,\text{م}_{\text{ب}}(\text{ل}+\text{ل}) + \text{م}_{\text{ا}}\,\text{ل} = ۶\left\{\frac{\text{و ل}}{۴}\times\frac{\text{ل}}{۲}\times\frac{\text{ل}}{۲\,\text{ل}} + \frac{\text{و ل}}{۴}\times\frac{\text{ل}}{۲}\times\frac{\text{ل}}{۲\,\text{ل}}\right\}$$

اس میں $\text{م}_{\text{ا}} = \text{م}_{\text{اَ}} = ۰$

$$\therefore\quad ۲\,\text{م}_{\text{ب}} \times ۲\,\text{ل} = ۶\left\{\frac{\text{و ل}^{۳}}{۱۶\,\text{ل}} + \frac{\text{و ل}^{۳}}{۱۶\,\text{ل}}\right\}$$

$$\therefore\quad \text{م}_{\text{ب}} = \frac{۳\,\text{و ل}}{۱۶}$$

اس طرح خماؤ کے معیار کا نقشہ شکل ع ۱۱۱ کے مطابق ہوگا۔
جز کا نقشہ حاصل کرنے کے لیے پہلے ردِّ عمل معلوم کرو۔

$$\text{ر}_{\text{ا}} = \frac{\text{و}}{۲} + \frac{\text{م}_{\text{ا}} - \text{م}_{\text{ب}}}{\text{ل}}$$

$$= \frac{\text{و}}{۲} - \frac{۳\,\text{و ل}}{۱۶\,\text{ل}}$$

$$= \frac{۵\,\text{و}}{۱۶}$$

$$\therefore\quad \text{ر}_{\text{ب}} = \frac{۱۱\,\text{و}}{۱۶}$$

جز کا نقشہ وہ ہوگا جو شکل میں دیا گیا ہے۔

ہم اس باب کو ختم کرنے سے پہلے ثابت اور مسلسل شہتیروں کی چند اور مثالیں حل کرینگے۔

حل شدہ مثالیں

(۱) ایک شہتیر جس کا فصل ۲۰ فٹ ہے ایک سرے پر دربستہ ہے اور دوسرے سرے سے ۵ فٹ کے فاصلے پر سہارا گیا ہے۔ $\frac{1}{2}$ ٹن فی طولی فٹ کے یکساں بوجھ کے لیے خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے کھینچی۔

فرض کرو کہ شہتیر اب ہے (شکل ۱۱۲) جو سرے ا پر ثابت ہے اور نقطہ ج پر سہارا گیا ہے۔

شہتیر کا حصہ ب ج ایک برآمدہ بیرم کی طرح ہے اس لیے ج پر خماؤ کا معیار

$$\text{م}_\text{ج} = \frac{1}{2} \times \frac{5 \times 5}{2} = 6.25 \text{ فٹ ٹن}$$

ا پر معیار معلوم کرنے کے لیے ایک خیالی فصل ا جَ مانو جو بالکل ا ج کے مشابہ ہے اور دیوار کے اندر ہے۔

تب تین معیاروں کے مسئلے سے

$$\text{م}_{\text{جَ}} \times 15 + 2\,\text{م}_\text{ا}\,(15+15) + \text{م}_\text{ج} \times 15 = \frac{1}{4}\left(15^3 + 15^3\right)$$

لیکن $\text{م}_{\text{جَ}} = \text{م}_\text{ج} = 6.25$

$$\therefore \quad 60\,\text{م}_\text{ا} + 6.25 \times 30 = \frac{1}{4}\left(2 \times 15^3\right)$$

$$\therefore \quad 4\,\text{م}_\text{ا} + 12.5 = \frac{15^2}{4}$$

$$\therefore \quad 4\,\text{م}_\text{ا} = \frac{15^2}{4} - 12.5$$

$$= 56.25 - 12.5 = 43.75$$

∴ $م_ا = ۱۰٫۹۴$ فٹ ٹن تقریباً

اس طرح خماؤ کے معیار کا نقشہ وہ ہوگا جو شکل میں دیا گیا ہے۔ ج پر کا ردِ عمل معلوم کرنے کے لیے بالکل مسلسل شہتیروں کا سا عمل کرنے سے

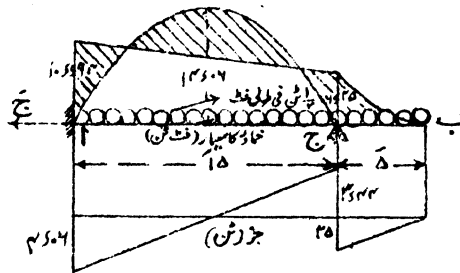
$$ر_ج = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۵}{۲} + \frac{م_ج - م_ا}{۱۵} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۵}{۲} + \frac{م_ج - م_ب}{۵}$$

$= ۱٫۱ + ۲٫۵ + ۱٫۲۵ + ۰٫۳۱ - ۳٫۷۵$

$= ۳٫۴۴ + ۲٫۵$

$= ۵٫۹۴$ ٹن

اس طرح جز کا نقشہ وہ ہوگا جو شکل میں دیا گیا ہے۔

شکل ۱۱۲

(۲) ایک بیلی ہوئی کڑی ایک سرے پر مضبوطی کے ساتھ وابستہ ہے اور دوسرا سرا ڈھلے لوہے کے ایک ستون کے اوپر آزادانہ ٹکا ہوا ہے۔ کڑی کا فصل ۱۶ فٹ ہے اور اس پر ستون سے ۱۲ فٹ کے فاصلے پر ۱۰ ٹن کا ایک اکیلا بوجھ ہے۔ ستون کا ردِ عمل معلوم کرو اور خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے کھینچو۔ (بی ایس سی لندن سنہ ۱۹۰۷ء)۔

فرض کرو کہ اب شہتیر ہے جو سرے ا پر ثابت ہے۔ بوجھ نقطہ ج پر ہے (شکل ۱۱۳)۔

آزاد خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مثلث ا د ب ہوگا جس میں ج د

$= \frac{\text{ج ا ب}}{\text{ل}} = \frac{4\times12\times10}{16} = 30$ فٹ ٹن

اس نقشے کا رقبہ $= \frac{1}{2}\times 30\times 16 = 240$ مربع فٹ ٹن

اس کا مرکز ہندسی گ شہتیر کے مرکز ع سے فاصلہ $\frac{1}{3}$ ع ج پر یعنی ب سے $9\frac{1}{3}$ فٹ کے فاصلے پر ہوگا۔

شکل ۱۱۳۔ اُس شہتیر کی مثال جو ایک سرے پر ثابت اور دوسرے پر سہارا ہوا ہو

اب ثابت سرے کے دوسری جانب ایک فصل ا ب کے بالکل مشابہ فرض کرو تو تین معیاروں کے مسئلے سے

$$16\,\text{م}_\text{ب} + 2\,\text{م}_\text{ا}(16+16) + 16\,\text{م}_\text{ج} = 6\left\{\frac{9\frac{1}{3}\times 240}{16} + \frac{9\frac{1}{3}\times 240}{16}\right\}$$

لیکن $\text{م}_\text{ب} = \text{م}_\text{ج} = 0$

$$\therefore\ ۶۴\,م_{ا} = \frac{۲۸ \times ۲۴۰ \times ۲ \times ۶}{۱۶ \times ۳} = ۲۴۰ \times ۷$$

$$م_{ا} = \frac{۲۴۰ \times ۷}{۶۴} = \frac{۲۱۰}{۸}$$

$$= ۲۶٫۲۵ \text{ فٹ ٹن}$$

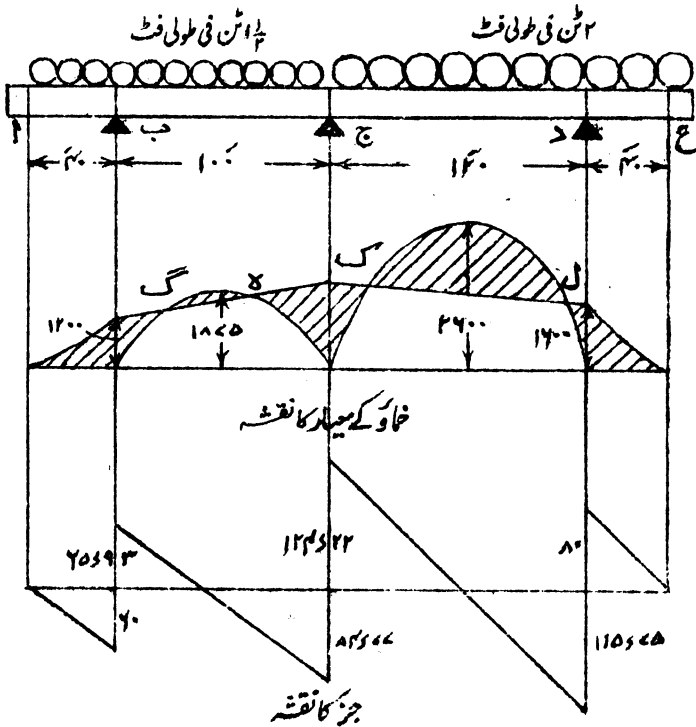
آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کی صورت میں ب کا ردِ عمل

$$= ر_{ب} = \frac{۳ \times ۱۰}{۱۶} = ۲٫۵ \text{ ٹن}$$

$$\therefore \text{ موجودہ صورت میں } س_{ب} = ر_{ب} + \frac{م_{ب} - م_{ا}}{ل}$$

$$= ۲٫۵ + \frac{۲۶٫۲۵ - ۰}{۱۶}$$

$$= ۲٫۵ - ۱٫۶۴$$

$$= ٫۸۶ \text{ ٹن}$$

شکل ۱۱۴

(۳) ایک مسلسل گرڈر دو نامساوی فصلوں پر مشتمل ہے جن کے طول ۱۰۰ فٹ اور ۱۲۰ فٹ ہیں۔ گرڈر کا طول ۳۰۰ فٹ ہے اور دونوں سروں پر برآویختہ ہے اور لداؤ وہ ہے جو شکل میں دکھایا گیا ہے (شکل ۱۱۴)۔ خماؤ کے معیار اور جزء کے نقشے کھینچو اور نقاطِ انعطاف اور سہاروں کی قوتوں کی مقدار دکھاؤ (بی۔ ایس سی لندن ۱۹۰۷ء)

اس صورت میں سروں کے حصے اب اور دع برآمدہ بیرم ہیں۔

∴ م~ب~ = (۴۰ × ۱½ × ۴۰) / ۲ = ۱۲۰۰ فٹ ٹن

م~د~ = (۴۰ × ۲ × ۴۰) / ۲ = ۱۶۰۰ فٹ ٹن

فصل ب ج کے لیے آزاد خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مکافی ہوگا

جس کا اعظم معین = (۱۰۰ × ۱۰۰ × ۱½) / ۸ = ۱۸۷۵ فٹ ٹن

فصل ج د کے لیے آزاد خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مکافی ہوگا

جس کا اعظم معین = (۱۲۰ × ۱۲۰ × ۲) / ۸ = ۳۶۰۰ فٹ ٹن

تب تین معیاروں کے مسئلے سے

۱۰۰ م~ب~ + ۲ م~ج~ (۱۰۰ + ۱۲۰) + ۱۲۰ م~د~ = ¼ (۱½ × ۱۰۰³ + ۲ × ۱۲۰³)

یعنی ۱۲۰۰۰۰ + ۴۴۰ م~ج~ + ۱۹۲۰۰۰ = ۳۷۵۰۰۰ + ۸۶۴۰۰۰

۴۴۰ م~ج~ = ۹۲۷۰۰۰

م~ج~ = ۲۱۰۷ فٹ ٹن تقریباً

اب ردِّ عملوں کو دیکھو:—

$$\text{ر}_{\text{ب}} = \tfrac{1}{2}\times 40\times 1\tfrac{1}{2} + \frac{\text{م}_{\text{ب}}-\text{م}_{\text{ا}}}{40} + \tfrac{1}{2}\times 100\times 1\tfrac{1}{2} + \frac{\text{م}_{\text{ب}}-\text{م}_{\text{ج}}}{100}$$

$$= 30 + 30 + 75 - 9.07$$

$$= 60 + 65.93 = 125.93 \text{ ٹن}$$

$$\text{ر}_{\text{ج}} = \tfrac{1}{2}\times 100\times 1\tfrac{1}{2} + \frac{\text{م}_{\text{ج}}-\text{م}_{\text{ب}}}{100} + \tfrac{1}{2}\times 2\times 120 + \frac{\text{م}_{\text{ج}}-\text{م}_{\text{د}}}{120}$$

$$= 75 + 9.07 + 120 + 4.22$$

$$= 84.07 + 124.22 = 208.29 \text{ ٹن}$$

$$\text{ر}_{\text{د}} = \tfrac{1}{2}\times 2\times 120 + \frac{\text{م}_{\text{د}}-\text{م}_{\text{ج}}}{120} + \tfrac{1}{2}\times 2\times 40 + \frac{\text{م}_{\text{د}}-\text{م}_{\text{ع}}}{40}$$

$$= 120 - 4.22 + 40 + 40$$

$$= 115.78 + 80 = 195.78 \text{ ٹن}$$

حاصل جمع ۵۳۰ ٹن

اس طرح جز کے نقشے شکل کے مطابق حاصل ہونگے۔ اور نقاط ک، ک، ک، ل نقاطِ انعطاف ہیں۔

(۴) ایک مسلسل شہتیر کا مجموعی طول ل ہے اور اس کے تین فصل ہیں اور اس پر بوجھ یکساں ہے۔ فصلوں کا سب میں زیادہ باکفایت انتظام معلوم کرو۔

تشاکل سے لازم آتا ہے کہ بہترین انتظام میں سروں کے فصل مساوی ہوں۔ فرض کرو کہ ان میں سے ہر ایک طول ل_{1} ہے اور وسطی فصل کا طول ل_{2} (شکل ۲۱۳ الف)۔ تب

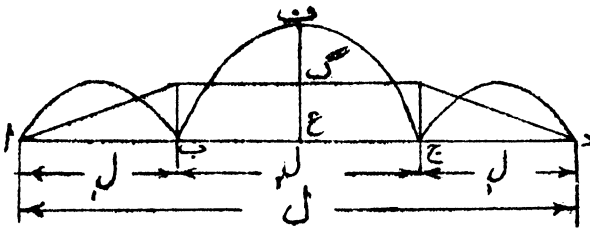
$$\text{ل} = \text{ل}_{۲} + ۲\,\text{ل}_{۱}$$

اب تین معیاروں کے مسئلے سے

$$\text{م}_{۱}\,\text{ل}_{۱} + ۲\,\text{م}_{\text{ب}}\,(\text{ل}_{۱} + \text{ل}_{۲}) + \text{م}_{\text{ج}}\,\text{ل}_{۲} = \frac{\text{ب}}{۴}\,(\text{ل}_{۱}^{۳} + \text{ل}_{۲}^{۳})$$

تشاکل سے $\text{م}_{\text{ج}} = \text{م}_{\text{ب}}$

اور $\text{م}_{۱} = ۰$

$$\therefore\ \text{م}_{\text{ب}}\,(۲\,\text{ل}_{۱} + ۳\,\text{ل}_{۲}) = \frac{\text{ب}}{۴}\,(\text{ل}_{۱}^{۳} + \text{ل}_{۲}^{۳})$$

شکل ۱۱۴ ا

ہم کو $\text{ل}_{۱}$ اور $\text{ل}_{۲}$ کا وہ ربط مطلوب ہے جس سے $\text{م}_{\text{ب}}$ اقل ہو اور پھر اس کا اطمینان کرنا ہوگا کہ $\text{م}_{\text{ب}}$ درمیانی خماؤ کے معیاروں سے زیادہ ہے۔ اس ربط سے سب میں زیادہ باکفایت انتظام حاصل ہوگا۔

$$\text{م}_{\text{ب}} = \frac{\frac{\text{ب}}{۴}\,(\text{ل}_{۱}^{۳} + \text{ل}_{۲}^{۳})}{(۲\,\text{ل}_{۱} + ۳\,\text{ل}_{۲})}$$

لیکن $\text{ل}_{۲} = \text{ل} - ۲\,\text{ل}_{۱}$

$$\therefore\ \text{م}_{\text{ب}} = \frac{\frac{\text{ب}}{۴}\left\{(\text{ل} - ۲\,\text{ل}_{۱})^{۳} + \text{ل}_{۱}^{۳}\right\}}{(۲\,\text{ل} - ۲\,\text{ل}_{۱} + ۲\,\text{ل}_{۲})}$$

یہ اقل ہوگا جب کہ $\frac{\text{فر}\,\text{م}_{\text{ب}}}{\text{فر}\,\text{ل}_{۱}} = ۰$

یعنی $\frac{ف}{ف\,ل_۱}\left(\frac{ل^۳ - ۶\,ل^۲\,ل_۱ + ۱۲\,ل\,ل_۱^۲ - ۷\,ل_۱^۳}{۳\,ل - ۴\,ل_۱}\right) = ۰$

یا $(۳\,ل - ۴\,ل_۱)(-۲۱\,ل_۱^۲ + ۲۴\,ل_۱\,ل - ۶\,ل^۲)$

$+ ۴\,(ل^۳ - ۶\,ل^۲\,ل_۱ + ۱۲\,ل_۱^۲\,ل - ۷\,ل_۱^۳) = ۰$

یا $۵۶\,ل_۱^۳ - ۱۱۱\,ل\,ل_۱^۲ + ۷۲\,ل_۱\,ل^۲ - ۱۴\,ل^۳ = ۰$

اِس مساوات کا حل ترسیم کے ذریعے $ل_۱ = ۳۵ء\,ل$ پایا جائیگا۔

اِس طرح دیکھو سہاروں کے معیاروں کی اقل قیمت اُس وقت واقع ہوتی ہے جب کہ سروں کا ہر ایک فصل ۳۵ء ل ہو اور وسطی فصل ۳ء ل موجودہ صورت میں درمیانی خماؤ کے معیار سہاروں کے معیاروں سے کم ہیں۔ اس طرح یہ انتظام سب میں زیادہ باکفایت ہے۔

دسواں باب

شہتیروں میں جزی زوروں کی تقسیم

جب کوئی شہتیر منصرف ہوتا ہے تو اس کے ہر نقطے پر ایک افقی[1] جزی زور ہوتا ہے جو ایک پرت پر سے دوسری پرت کے پھسلنے کو روکتا ہے۔ ہم یہ دکھا چکے ہیں (صفحہ ۱۵) کہ لچکدار شے میں ایک جزی زور کے ساتھ ایک مساوی حدت کا جزی زور اس کے علی القوائم ہمیشہ پایا جاتا ہے۔ اس طرح دیکھو شہتیر کی صورت میں کسی نقطے پر افقی اور انتصابی جزی زوروں کی حدتیں کسی نقطے پر مساوی ہونگی۔ اب کسی انتصابی تراشش پر مجموعی جزی قوت اُس جزی قوت کے مساوی ہونی چاہیئے تو گزشتہ ابواب کی طرح شہتیر کی قوتوں پر غور کرنے سے حاصل ہو۔ لیکن زور کی حدت تراش کے اندر یکساں نہیں ہوگی۔ اِس طرح جزی قوت ج کو تراش کے رقبہ ب سے تقسیم کرنے سے جیساکہ عام طور پر کیا جاتا ہے، اعظم جزی زور نہیں حاصل ہوگا۔

اُفقی جزی زور کی موجودگی ذیل کے تجربے سے نظر آسکتی ہے۔ شکل ۱۱۵ع ۱ میں ایک چھوٹا شہتیر دکھایا گیا ہے جو کسی بوجھ کے تحت

---

[1] ۔ ہم اس بحث میں فرض کرینگے کہ شہتیر افقی ہے۔ اگر یہ صورت نہ ہو تو "افقی" اور "انتصابی" کی بجائے "شہتیر کے محور کے متوازی" اور "شہتیر کے محور کے علی القوائم" پڑھے جائیں۔

متصرف ہوا ہے۔ اب خیالی طور پر شہتیر کی بجائے چند تختیاں ایک کے اوپر ایک رکھ دو۔ یہ تختیاں ایک دوسری پر پھسل کر وہ وضع اختیار کرینگی جو شکل کے حصہ ب میں دکھائی گئی ہے۔ اس دوسری صورت میں یعنی تختیوں کی صورت میں مضبوطی پہلی صورت سے کم ہوتی ہے۔ اور یہ ظاہر ہے کہ صورت ۱ میں ایسے زور پائے جائینگے جو ایک پرت کو دوسری پر پھسلانے کی کوشش کرینگے۔

اب ہم شہتیر کے کسی نقطے پر جزی زور کا جملہ حاصل کرینگے اور بعد میں چند خاص صورتوں پر غور کرینگے۔

عام صورت۔ فرض کرو کہ ا ب اور ا, ب, (شکل ۱۱۶) ایک شہتیر کی دو تراشیں ایک چھوٹے فاصلہ لا پر ہیں، اور فرض کرو کہ اس شہتیر کی تراش ایک انتصابی محور کے گرد متشاکل ہے، اور فرض کرو کہ لداؤ تمام تر عرضی ہے۔ تب جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں کسی نقطے پر عرضی زور کی حدت ع ج گ اور ع, ج گ, سے حاصل ہوگی۔ اب تراش ا ب کے اُس حصے پر غور کرو جو کسی خط د د کے اوپر ہے۔ تعدیلی محور سے فاصلہ ط ن پر کسی نقطہ ط پر ایک چھوٹے رقبہ یہ پر غور کرو۔

شکل ۱۱۵ شہتیروں میں افقی جزہ

تب خماؤ کے نظریے کی رُو سے ط پر زور کی حدت = $\text{ز}_{\text{ط}} = \frac{\text{م} \times \text{ط ن}}{\text{آ}}$ ،
جہاں م اس نقطے پر خماؤ کا معیار ہے اور آ تراش کا دوسرا معیار۔

$$\therefore \quad \text{رقبہ ب پر قوت} = \text{ز}_{\text{ط}} \times \text{ب} = \frac{\text{م} \times \text{ط ن}}{\text{آ}} \times \text{ب}$$

$$\therefore \quad \text{رقبہ د د پر مجموعی قوت} = \Sigma \frac{\text{م} \times \text{ط ن}}{\text{آ}} \times \text{ب}$$

$$= \text{ن} = \frac{\text{م}}{\text{آ}} \Sigma \, \text{ب} \times \text{ط ن}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{آ}} \times \text{د د کے اوپر کے رقبے کا پہلا معیار تعدیلی محور کے گرد}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{آ}} \times \text{ب} \times \text{ما} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

جہاں ب خط د د کے اوپر کا رقبہ ہے اور ما اس کے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ تعدیلی محور سے ہے۔

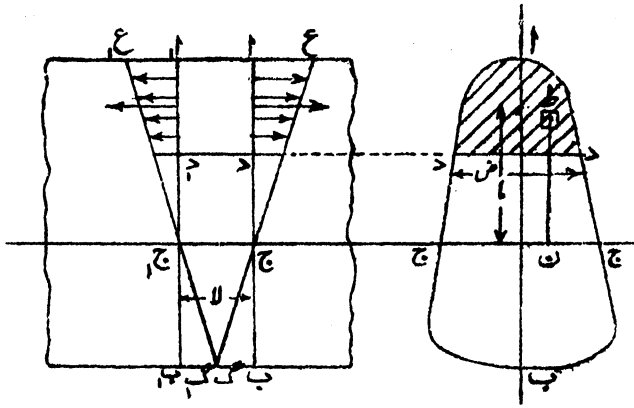
اسی طرح تراش ۱، ب۱ میں خط د۱ د۱ کے اوپر کے رقبے پر کی قوت

$$= \text{ن}_۱ = \frac{\text{م}_۱}{\text{آ}_۱} \times \text{ب}_۱ \, \text{ما}_۱$$

اب اگر لا چھوٹا ہو اور شہتیر کی تراش میں کوئی یکایک تبدیلی نہ ہو تو ب = ب۱، ما = ما۱ اور آ = آ۱ رکھ سکتے ہیں۔

$$\therefore \quad \text{ن} - \text{ن}_۱ = \frac{(\text{م} - \text{م}_۱) \, \text{ب ما}}{\text{آ}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

عرضی قوت کا یہ فرق وہ جزی قوت ہے جو خط د د۱ پر برداشت ہوتی ہے۔ اِس کو یوں لکھ سکتے ہیں

$$\text{ن} - \text{ن}_۱ = \frac{(\text{م} - \text{م}_۱)}{\text{لا}} \times \frac{\text{ب ما لا}}{\text{آ}}$$

شکل ۱۱۶۔ جزی تقسیم

اب اگر لا بہت چھوٹا ہو تو $\frac{م - م_۱}{لا}$ خماؤ کے معیار کے بڑھنے یا گھٹنے کی شرح ہوگی اور اس کو ہم دیے ہوئے نقطے میں کی تراش پر کی جزی قوت ق کے مساوی ثابت کر چکے ہیں۔

$$\therefore \; ن_۱ - ن_۲ = \frac{ق \times ب \times ما \times لا}{آ} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

یہ جزی قوت رقبہ د د × د د = د د × لا = لا × ض پر عمل کرتی ہے۔

$$\therefore \; د د \text{ پر اوسط جزی زور } = \frac{ن_۱ - ن_۲}{ض \; لا}$$

$$= \frac{ق \times ب \times ما \times لا}{ب \; لا \times آ}$$

یعنی

$$ج = \frac{ق \times ب \times ما}{آ \times ض} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

اس کو پوری تراشش پر کے اوسط زور س = $\frac{ق}{ب}$ کی رقوم میں یوں لکھ سکتے ہیں:—

$$ج = \frac{ق \times ب \times ما}{ب \times گ^۲ \times ض}$$

$$= س \times \frac{ب \times ما}{گ^۲ \; ض} \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

اس میں $\frac{\text{ب ما}}{\text{گ}^2\ \text{ض}}$ کو "جز کا سر" کہا جاسکتا ہے۔

دیکھو ب × ما تعدیلی محور تک بڑھتا ہے اور پھر گھٹتا ہے کیونکہ تعدیلی محور کے نیچے کے رقبے کا پہلا معیار منفی ہے۔

اس طرح دیکھو جزی زور تعدیلی محور پر اعظم ہوتا ہے۔

یہ یاد رہے کہ ج سے دد پر کی اوسط حدت حاصل ہوتی ہے۔

جزی زور دد پر بھی یکساں نہیں ہوگا لیکن اگر تراش تعدیلی محور پر پتلی ہو جیساکہ استعمال میں آنے والی تراشیں ہوتی ہیں تو تعدیلی محور پر اعظم جز تعدیلی محور کی ج کی قیمت سے، جو اوپر کے ضابطے سے حاصل ہو، کچھ بہت زیادہ نہیں ہوگا۔ مربع یا مدور جیسی تراشوں میں دد پر اعظم جز اوسط سے ۵ تا ۱۰ فیصدی زیادہ ہوگا اور چپٹے ناقص یا چپٹے مستطیل کے لیے یہ فرق ۲۵ فیصدی تک ہوسکتا ہے۔ دد پر جزی زور کے تغیر سے بحث کرنا ہماری موجودہ بحث کی وسعت سے باہر ہے۔ یہاں صرف اتنا یاد رکھنا کافی ہے کہ یہ زور یکساں نہیں۔
سینٹ وینٹ نے مختلف صورتوں کے لیے اعظم زور کی قیمت حاصل کی ہے۔

ذیل کی خاص صورتوں پر غور کرو (شکل ۱۱۷، ۱۱۸):-

(۱) مستطیلی تراش ـــ بلندی ھ اور عرض ض ہو تو تعدیلی محور سے فاصلہ لا پر اوسط جز

$$\text{ج}_{\text{لا}} = \text{س} \times \frac{\text{ب} \times \text{ما}}{\text{گ}^2\ \text{ض}}$$

موجودہ صورت میں $\text{ب} = \left(\frac{\text{ھ}}{۲} - \text{لا}\right) \text{ض}$

$$\text{ما} = \text{لا} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\text{ھ}}{۲} - \text{لا}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\text{ھ}}{۲} + \text{لا}\right)$$

$$\text{گ}^2 = \frac{\text{ھ}^2}{۱۲}$$

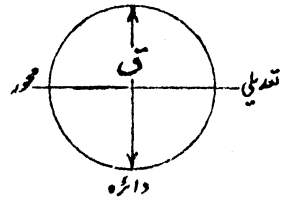
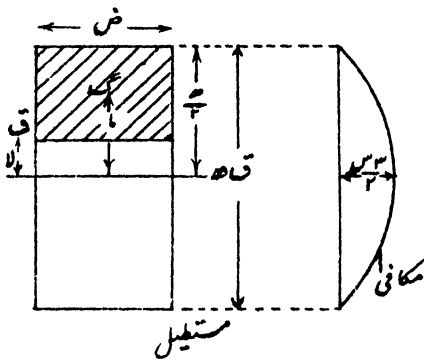
$$\therefore \text{ج}_{\text{لا}} = \frac{\text{س}\left(\frac{\text{ھ}}{۲} - \text{لا}\right)\text{ض} \times \frac{۱}{۲}\left(\frac{\text{ھ}}{۲} + \text{لا}\right)}{\frac{\text{ھ}^2}{۱۲} \times \text{ض}}$$

St. Venant

$$= \frac{٦ س \left(\frac{ھ^2}{۴} - لا^2\right)}{ھ^2}$$

$$= ٦ س \left(\frac{۱}{۴} - \frac{لا^2}{ھ^2}\right)$$

$$= \frac{۳}{۲} س \left(۱ - \frac{۴ لا^2}{ھ^2}\right)$$

نوٹ:

شکل ۱۱۷

اس میں لا² شریک ہوتا ہے اس لیے مختلف گہرائیوں پر اوسط جزی زور کو تعبیر کرنے والا منحنی ایک مکانی ہوگا۔ ج کی قیمت لا = ۰ یعنی تعدیلی محور پر اعظم ہوگی۔ اس جگہ ج = $\frac{۳ س}{۲}$ = ۱٫۵ س۔ یعنی مستطیلی شہتیر میں اعظم جزی زور مرکز پہ واقع ہوتا ہے اور پوری تراش کے اوسط جزی زور (یعنی جزی قوت بٹے رقبہ) کا ڈیڑھ گنا ہوتا ہے۔

(۲) مدور تراش — یہ صورت گزشتہ صورت کی طرح آسان نہیں لیکن تعدیلی محور پہ کا جزی زور آسانی سے یوں معلوم ہو سکتا ہے :—

اس صورت میں

$$ب = \frac{\pi ق^2}{۸}$$

$$ما = \frac{۲ ق}{۳ \pi}$$

$$گ^۲ = \frac{ق^۲}{۱۶}$$

$$ض = ق$$

$$\therefore \text{تعدیلی محور پر جزی زور} = س \times \frac{\frac{\pi ق^۲}{۸} \times \frac{۲ ق}{۳ \pi}}{\frac{ق^۲}{۱۶} \times ق}$$

$$= \frac{۴}{۳} س = ۱.۳۳ س$$

یعنی تعدیلی محور پر اوسط جزی زور پوری تراشش کے اوسط جزی زور کا $\frac{۱}{۳}$۱ گنا ہے۔

معلوم ہو کہ اِس صورت میں تعدیلی محور پر کا اعظم جزی زور ۱.۵ س ہوتا ہے۔

(۳) نل نما تراش ــــ فرض کرو کہ ایک پتلا نل ہے جس کا اوسط قطر ق اور موٹائی ٹ ہے۔

$$\text{تب} \qquad ب = \frac{\pi ق ٹ}{۲}$$

$$ما = \frac{ق}{\pi}$$

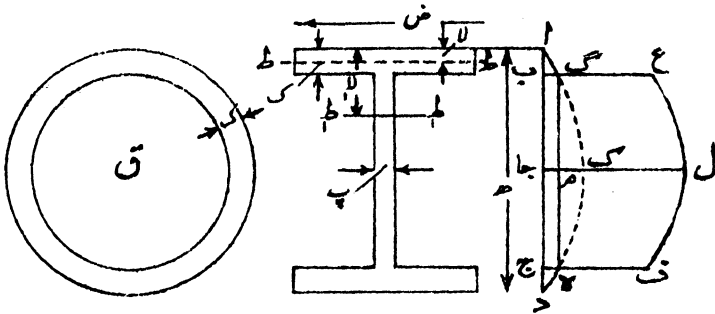
$$گ^۲ = \frac{ق^۲}{۸}$$

$$ض = ۲ ٹ$$

$$\therefore ج\ (\text{تعدیلی محور پر}) = س \times \frac{\frac{\pi ق ٹ}{۲} \times \frac{ق}{\pi}}{\frac{ق^۲}{۸} \times ۲ ٹ} = ۲ س$$

یعنی تقدیلی محور پر اوسط جزی زور پوری تراشش کے اوسط جزی زور کا دگنا ہوتا ہے۔

(۴) I تراش ——— اس میں کوروں اور پیٹے پر پڑنے والی جزی قوت علٰحدہ علٰحدہ محسوب کرینگے۔

فرض کرو کہ ایک I شہتیر کا عرض ض، گہرائی ھ، کوروں کی موٹائی ک اور پیٹے کی موٹائی پ ہے۔

شکل ۱۸

پہلے کور میں ایک افقی خط ط ط بالائی کنارے سے فاصلہ لا پر لو (شکل ۱۸)۔

تب ط ط پر اوسط جز = $\text{س} \times \dfrac{\text{ب} \times \text{ا}}{\text{گ}^{\text{۲}} \times \text{ض}}$

$$= \text{ج}_{\text{لا}} = \frac{\text{س} \times \text{ض لا (ھ - لا)}}{\text{ض گ}^{\text{۲}} \times \text{۲}}$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{۲ گ}^{\text{۲}}} \left(\text{ھ لا} - \text{لا}^{\text{۲}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

اس میں لا۲ شریک ہوتا ہے، اس لیے زور کے تغیر کا منحنی ایک مکافی ہوگا۔ لا = ک یعنی کور اور پیٹے کے مقام اتصال پر

$$\text{ج}_\text{ک} = \frac{\text{س}}{\text{۲گ}^\text{۲}}(\text{ھ ک} - \text{ک}^\text{۲}) \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۲})$$

اب پیٹے میں ایک خط ط ط۱ بالائی کنارے سے فاصلہ لا۱ پر لو۔

تب ط ط۱ پر اوسط جز = $\frac{\text{س ب ما}}{\text{گ}^\text{۲}\ \text{ض}}$

موجودہ صورت میں

ب ما = تعدیلی محور کے گرد ط ط۱ کے اوپر کے رقبے کا پہلا معیار

$$= \frac{\text{ض ک (ھ - ک)}}{\text{۲}} + \text{پ} (\text{لا}_\text{۱} - \text{ک}) \left\{ \frac{\text{ھ}}{\text{۲}} - (\text{ک} + \frac{\text{لا}_\text{۱} - \text{ک}}{\text{۲}}) \right\}$$

$$= \frac{\text{ض ک (ھ - ک)}}{\text{۲}} + \frac{\text{پ} (\text{لا}_\text{۱} - \text{ک})(\text{ھ} - \text{لا}_\text{۱} - \text{ک})}{\text{۲}}$$

اور جزی زور کے عام جملے میں پیٹے کے لیے ض = پ

$$\therefore \text{ج}_\text{ط} = \frac{\text{س}}{\text{۲گ}^\text{۲}} \left\{ \frac{\text{ض ک (ھ - ک)}}{\text{پ}} + \text{پ} \frac{(\text{لا}_\text{۱} - \text{ک})(\text{ھ} - \text{لا}_\text{۱} - \text{ک})}{\text{پ}} \right\}$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{۲گ}^\text{۲}} \left\{ \frac{\text{ض ک (ھ - ک)}}{\text{پ}} + (\text{ھ لا}_\text{۱} - \text{لا}_\text{۱}^\text{۲} - \text{ھ ک} + \text{ک}^\text{۲}) \right\}$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{۲گ}^\text{۲}} \left\{ (\text{ھ لا}_\text{۱} - \text{لا}_\text{۱}^\text{۲}) + (\text{ھ} - \text{ک}) (\frac{\text{ض ک}}{\text{پ}} - \text{ک}) \right\}$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{۲گ}^\text{۲}} (\text{ھ لا}_\text{۱} - \text{لا}_\text{۱}^\text{۲}) + \frac{\text{س ک (ھ - ک)(ض - پ)}}{\text{۲گ}^\text{۲}\ \text{پ}} \ldots\ldots\ldots (\text{۳})$$

اس جملے کی دوسری رقم لا۱ پر منحصر نہیں اور پہلی رقم وہ جزی زور ہے جو واقع ہوتا اگر کوریں ط ط۱ تک ہوتیں۔

اس طرح دیکھو زور کی تقسیم کا نقشہ یوں حاصل ہوگا:۔

پہلے ایک مکانی ا ک د کھینچو جس کا مرکزی معین جا گ مساوات (۱)

میں $\text{لا} = \frac{\text{ھ}}{۲}$ رکھنے سے حاصل ہوگا۔

$$\text{یعنی}\quad \text{جاک} = \frac{\text{س}}{۲\,\text{گ}^۲}\left(\frac{\text{ھ}^۲}{۲} - \frac{\text{ھ}^۲}{۴}\right) = \frac{\text{س ھ}^۲}{۸\,\text{گ}^۲}$$

نقاط ب اور ج پر کوروں کے اندرونی پہلوؤں کے تناظر گ ع

اور $\text{ھ ف} = \frac{\text{س ک}(\text{ھ} - \text{ک})(\text{ض} - \text{پ})}{۲\,\text{گ}^۲\,\text{پ}}$ قایم کرو اور نقاط ع اور ف کے درمیان

مکافی کا حصہ گ ک ھ کھینچو۔ تب منحنی اگ ع ل ف ھ د سے تراش کی

مختلف گہرائیوں پر جزی زور معلوم ہوگا۔

پیٹے پر مجموعی جزی قوت منحنی کے حصہ ب ع ل ف ج کے

رقبے کو پیٹے کے عرض سے ضرب دینے سے حاصل ہوگی۔

اِس صورت پر غور کرو جس میں $\text{ک} = \frac{\text{ھ}}{۱۰}$، $\text{پ} = \frac{\text{ھ}}{۲۰}$ اور $\text{ض} = \frac{\text{ھ}}{۲}$

یہ تقریباً وہ تناسب ہے جو بیلے فولاد کی کڑیوں میں پایا جاتا ہے۔ تب

$$\text{ب گ} = \text{ج ک} = \frac{\text{س}}{۲\,\text{گ}^۲}(\text{ھ ک} - \text{ک}^۲)$$

$$= \frac{\text{س}}{۲\,\text{گ}^۲}\left(\frac{\text{ھ}^۲}{۱۰} - \frac{\text{ھ}^۲}{۱۰۰}\right)$$

$$= \frac{\text{س}}{۲\,\text{گ}^۲} \times \frac{۹\,\text{ھ}^۲}{۱۰۰}$$

$$\therefore\quad \text{م ک} = \frac{\text{س}}{۲\,\text{گ}^۲}\left(\frac{\text{ھ}^۲}{۴} - \frac{۹\,\text{ھ}^۲}{۱۰۰}\right) = \frac{\text{س}}{۲\,\text{گ}^۲} \times \frac{۱۶\,\text{ھ}^۲}{۱۰۰}$$

$$= \frac{\text{س}}{۲\,\text{گ}^۲} \times \frac{۴\,\text{ھ}^۲}{۲۵}$$

$$\text{نیز}\quad \text{گ ع} = \frac{\text{س ک}(\text{ھ} - \text{ک})(\text{ض} - \text{پ})}{۲\,\text{گ}^۲\,\text{پ}}$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{۲گ}^{\text{۲}}} \times \frac{\text{ھ}}{\text{۱۰}} \times \frac{\text{۹ھ}}{\text{۱۰}} \times \frac{\text{۹ھ}}{\text{۲۰}} \times \frac{\text{۲۰}}{\text{ھ}}$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{۲گ}^{\text{۲}}} \times \frac{\text{۸۱ھ}^{\text{۲}}}{\text{۱۰۰}}$$

$$\therefore \quad \text{ب ع} = \frac{\text{س}}{\text{۲گ}^{\text{۲}}} \times \frac{\text{۹ھ}^{\text{۲}}}{\text{۱۰۰}} + \frac{\text{س}}{\text{۲گ}^{\text{۲}}} \times \frac{\text{۸۱ھ}^{\text{۲}}}{\text{۱۰۰}}$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{۲گ}^{\text{۲}}} \times \frac{\text{۹ھ}^{\text{۲}}}{\text{۱۰}}$$

منحنی ب ع ل ف ج کا رقبہ $= \text{ب ج} \left(\text{ب ع} + \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\ \text{ھ ک}\right)$

$$= \frac{\text{۴ھ}}{\text{۵}} \times \frac{\text{س}}{\text{۲گ}^{\text{۲}}} \left(\frac{\text{۹ھ}^{\text{۲}}}{\text{۱۰}} + \frac{\text{۸ھ}^{\text{۲}}}{\text{۷۵}} \right) \ldots\ldots\ldots \text{(۴)}$$

موجودہ صورت میں $\text{آ} = \frac{\text{ض ھ}^{\text{۳}}}{\text{۱۲}} - \frac{(\text{ض} - \text{پ})(\text{ھ} - \text{۲ک})^{\text{۳}}}{\text{۱۲}}$

$$= \frac{\text{ھ}^{\text{۴}}}{\text{۲۴}} - \frac{\text{۹ھ}}{\text{۲۰}} \left(\frac{\text{۴ھ}}{\text{۵}} \right)^{\text{۳}} \times \frac{\text{۱}}{\text{۱۲}}$$

$$= \text{۰٫۰۴۱۷ ھ}^{\text{۴}} - \text{۰٫۰۱۹۲ ھ}^{\text{۴}}$$

$$= \text{۰٫۰۲۲۵ ھ}^{\text{۴}}$$

تراش کا رقبہ $= \text{ض ھ} - (\text{ض} - \text{پ})(\text{ھ} - \text{۲ک})$

$$= \text{ب} = \frac{\text{ھ}^{\text{۲}}}{\text{۲}} - \frac{\text{۹ھ}}{\text{۲۰}} \times \frac{\text{۴ھ}}{\text{۵}}$$

$$= \text{۰٫۱۴ ھ}^{\text{۲}}$$

$$\therefore \quad \text{گ}^{\text{۲}} = \frac{\text{آ}}{\text{ب}} = \frac{\text{۰٫۰۲۲۵ ھ}^{\text{۴}}}{\text{۰٫۱۴ ھ}^{\text{۲}}} = \text{۰٫۱۶۰۸ ھ}^{\text{۲}}$$

مساوات (۴) پر واپس آؤ۔ منحنی ب ع ل ف ج کا رقبہ

$$= \frac{\text{۴ س ھ}}{\text{۱۰ اگ}^{۲}} \left\{ \frac{\text{۹ ھ}^{۲}}{۱۰} + \frac{\text{۸ ھ}^{۲}}{۶۵} \right\}$$

$$= \frac{\text{۴ س ھ} \times \text{۱٫۰۰۷ ھ}^{۲}}{۱۰ \times \text{۱٫۶۰۸ ھ}^{۲}}$$

$$= \text{۲٫۵۰۵ س ھ} \quad \text{.......... (۵)}$$

∴ پیٹے پر پڑنے والا جز = ۲٫۵۰۵ س ھ × پیٹے کا عرض

$$= \text{۲٫۵۰۵ س ھ} \times \frac{\text{ھ}}{۲۰}$$

$$= \text{٫۱۲۵۲ س ھ}^{۲} \quad \text{.......... (۶)}$$

پوری تراش کا رقبہ = ٫۱۴ ھ²

∴ تراش پر مجموعی جزی قوت ق = ٫۱۴ ھ² × س

$$\therefore \frac{\text{پیٹے پر پڑنے والا جز}}{\text{مجموعی جز}} = \frac{٫۱۲۵۲}{٫۱۴} = \text{۸۹٫۴ فیصدی}$$

عملاً عموماً یہ مان لیا جاتا ہے کہ تختہ اور بکس گرڈروں میں پورا جز پیٹے پر پڑتا ہے۔ اوپر کے حساب سے معلوم ہوتا ہے کہ I شہتیر میں، جس میں کہ کوریں گہرائی کا لحاظ کرتے اکثر تختہ اور بکس گرڈروں کی کوروں سے بڑی ہوتی ہیں، یہ مفروضہ ۱۰ فیصدی کی حد تک صحیح ہے اس لیے تختہ اور بکس گرڈروں میں جو معمولی قواعد کے تحت تجویز کیے جائیں یہ مفروضہ اور زیادہ صحیح ہوگا اور عملاً بالکل جائز ہوگا۔

لیکن اس کا خیال رہے کہ جو گرڈر کڑیوں اور تختوں کے بنے ہوں جیسے کہ عمارتوں میں استعمال ہونے والے مقابلۃً کم گہرے اور وزنی گرڈر ہوتے ہیں ان میں یہ مفروضہ اتنا صحیح نہیں ہوگا۔ لیکن پھر بھی غلطی حفاظت کی جانب ہوگی کیونکہ پیٹے کے حقیقی زور مفروضہ زوروں سے کم ہونگے۔

تراش کے اندر جزی زور کی تقسیم معلوم کرنے کا ترسیمی طریقہ

کڑیوں اور تختوں سے بنی ہوئی اُس تراش پر غور کرو جو شکل ۱۱۹ء میں دکھائی گئی ہے۔ پہلا مرحلہ یہ ہے کہ تراش کو ایک انتصابی مرکزی خط کے گرد لایا جائے۔ یہ اس طرح کیا جاتا ہے کہ کڑیوں پر آڑے اُفقی خطوط کھینچے جائیں اور مرکزی کڑی کے دونوں طرف بازو کی کڑیوں کا اُفقی معین جمع کیا جائے۔ اس سے وہ تراش حاصل ہوگی جو شکل میں دکھائی گئی ہے (یعنی ا د = ا ب + ب ج + ج د)۔

کسی خط ط ط پر غور کرو۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ط ط پر اوسط جز

$$= ج_ط = س \times \frac{ب\ ما}{گ^۲ ض}$$

اِس میں ب × ما = ط ط کے اوپر کے رقبے کا پہلا معیار تعدیلی محور لا لا کے گرد۔ لالا کے گرد لالا کے اوپر کے حصے کے پہلے معیار کا منحنی کھینچو جس کا طریقہ صفحہ ۹۴ و ۹۵ پر سمجھایا گیا ہے۔ چونکہ تراش ایک انتصابی محور کے گرد متشاکل ہے اس لیے رقبے کے صرف نصف حصہ کے لیے منحنی کھینچنا کافی ہے۔ یہ منحنی لا ص ج ہے۔

تب ب × ما = ۲ × رقبہ جا لا ص ن × ھ

$$\therefore \text{ط ط پر اوسط جز} = \frac{س}{گ^۲ ض} \times \frac{۲ \times جا\ لا\ ص\ ن \times ھ}{۱}$$

اب قطبی فاصلہ ف $= \frac{گ^۲}{ھ}$ لے کر پہلے معیار کے منحنی کا حاصل جمع منحنی جا ر س حاصل کرو۔

شکل ۱۱۹ع

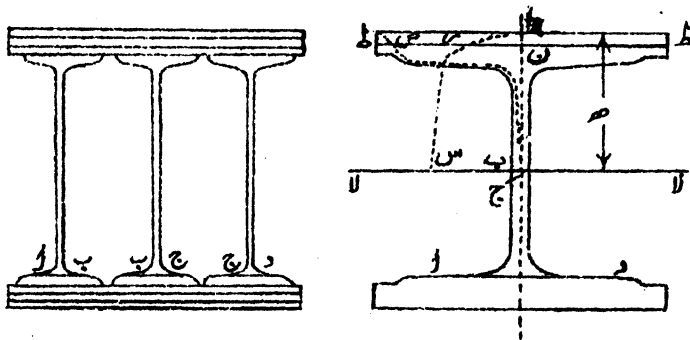
تب ن م × ف = پہلے معیار کے منحنی کا رقبہ ط ط کے اوپر

$\therefore$ $\frac{ن م × گ^۲}{ھ}$ = رقبہ جا لا ص ن

$\therefore$ ط ط پر اوسط جز = $\frac{س}{ض گ^۲} × \frac{۲ ن م × گ^۲}{ھ} × ھ$

$= س × \frac{۲ ن م}{ض}$

لیکن   ض = ط ط = ۲ ن ط

$\therefore$ ط ط پر اوسط جز = $س × \frac{ن م}{ن ط}$

اور اعظم جزی زور جو تعدیلی محور پر واقع ہوگا س × $\frac{ج س}{ج ب}$ ہوگا۔

نوٹ۔ شکل ۱۱۹ع صرف ایک خاکہ ہے اور پیمانے پر نہیں اتاری گئی۔ طلبہ اس مثال میں تختیاں ۲۰" × ½" اور شہتیر ۱۶" × ۶" لے کر اس کو بطور ایک سوال کے حل کریں۔ صحت کے لیے شکل بڑے پیمانے پر کھینچی جائے۔

شہتیر کا انصراف جزکی وجہ سے — اب تک ہم نے صرف

خماؤ کے معیار سے پیدا ہونے والے انصراف پر غور کیا ہے۔ اب ہم دیکھینگے کہ جز سے پیدا ہونے والا انصراف خماؤ کے معیار سے پیدا ہونے والے انصراف کے مقابلے میں کتنا ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ج ج (شکل ۱۲۰) ایک شہتیر کے مرکزی خط کے ایک چھوٹے طول لا کو تعبیر کرتا ہے جس پر جزی زور ج ہے۔

تب جز کی وجہ سے خط ج ج وضع ج ج، اختیار کریگا جس کا ڈھال سہ ہوگا۔

تب اگر جز کا مقیاس م ہو تو سہ = $\frac{ج}{م}$

شہتیر کے چھوٹے طول کا انصراف ج ج = لا × سہ کیونکہ سہ چھوٹا ہے۔

∴ چھوٹے طول لا کا انصراف = $\frac{لا \times ج}{م}$

∴ جزکی وجہ سے مجموعی انصراف = $\Sigma \frac{لا \times ج}{م}$

اس میں ج = س × $\frac{ب \times ما}{ض\ گ^2}$ جہاں س = $\frac{ق}{ب}$ جس میں ق تراش پر کی جزی قوت ہے اور ب تراش کا رقبہ۔

اگر تراش طول میں یکساں ہو تو $\frac{ب\ ما}{ض\ گ^2}$ مستقل ہوگا اور فرض کرو کہ بہ کے مساوی ہے۔

تب جزکی وجہ سے انصراف = $\Sigma\, لا \times \frac{بہ\ ق}{ب\ م}$

$= \frac{بہ}{ب\ م} \Sigma\, لا\ ق$

لیکن Σ لا ق = جزی قوت کے منحنی کا رقبہ دی ہوئی تراش تک

= خماؤ کا معیار اس تراش پر

= م

$\therefore$ جز کی وجہ سے انصراف = صا = $\frac{\text{بہ}}{\text{ب م}} \times$ م ....(۱)

اب ذیل کی صورتوں پر غور کرو:-

(۱) منفرد مرکزی بوجھ

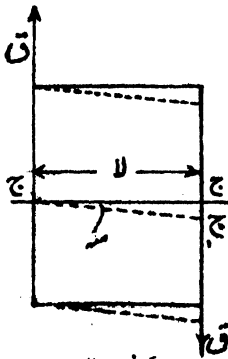
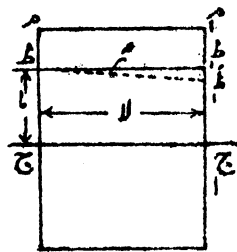
مرکز پر انصراف = صا = $\frac{\text{بہ}}{\text{ب م}} \times \frac{\text{و ل}}{۴}$

اور یہ دکھایا جا چکا ہے کہ اس صورت میں خماؤ کے معیار کی وجہ سے

انصراف صہ = $\frac{\text{و ل}^{۳}}{\text{۴۸ آ ے}}$

$\therefore \frac{\text{صا}}{\text{صہ}} = \frac{\text{بہ}}{\text{ب م}} \times \frac{\text{و ل}}{۴} \div \frac{\text{و ل}^{۳}}{\text{۴۸ آ ے}}$

$= \frac{\text{۱۲ ے}}{\text{م}} \times \frac{\text{بہ آ}}{\text{ب ل}^{۲}}$

شکل نمبر ۱۲۰

شکل ۱۲۱

$\frac{\text{ے}}{\text{م}} = \frac{۵}{۲}$ لینے سے اور $\text{آ} = \text{ب گ}^۲$ رکھنے سے

$$\frac{\text{صا}}{\text{صہ}} = ۳۰ \frac{\text{بہ گ}^۲}{\text{ل}^۲} \quad \text{.......... (۲)}$$

(۲) مسلسل لداؤ۔

اس صورت میں $\text{صا} = \frac{\text{بہ}}{\text{ب م}} \times \frac{\text{و ل}}{۸}$

اور $\text{صہ} = \frac{۵ \text{ و ل}^۳}{۳۸۴ \text{ آ ے}}$

$$\therefore \frac{\text{صا}}{\text{صہ}} = \frac{۴۸ \text{ بہ}}{۵} \times \frac{\text{ے}}{\text{م}} \times \frac{\text{آ}}{\text{ب ل}^۲}$$

حسب سابق $\frac{\text{ے}}{\text{م}} = \frac{۵}{۲}$ لینے سے

$$\frac{\text{صا}}{\text{صہ}} = ۲۴ \text{ بہ} \frac{\text{گ}^۲}{\text{ل}^۲} \quad \text{.......... (۳)}$$

مستطیلی تراش کے لیے $\text{بہ} = ۱٫۵$ اور $\text{گ}^۲ = \frac{\text{ھ}^۲}{۱۲}$، جہاں ھ شہتیر کی گہرائی ہے۔

اس طرح (۲) ہو جاتا ہے $\frac{\text{صا}}{\text{صہ}} = ۳٫۷۵ \left(\frac{\text{ھ}}{\text{ل}}\right)^۲$

اور (۳) " $\frac{\text{صا}}{\text{صہ}} = ۳ \left(\frac{\text{ھ}}{\text{ل}}\right)^۲$

اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر $\frac{\text{ھ}}{\text{ل}} = \frac{۱}{۱۰}$ تو جز کی وجہ سے انحراف ان دو صورتوں میں خماؤ کے معیار سے پیدا ہونے والے انحراف کا علی الترتیب ۳٫۷۵ فیصدی اور ۳ فیصدی ہوگا۔

اس طرح دیکھو اگر ٹھوس مستطیلی شہتیروں میں فصل گہرائی کے ۱۰ گنے سے زیادہ ہو تو جز سے پیدا ہونے والے انحراف کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔

لیکن یہ یاد رہے کہ بیلی کڑیوں، تختہ گرڈروں، وغیرہ، کی ایسی تراشوں میں

جو فصل کے لحاظ سے خاصے گہرے ہوں جز کا انصراف قابلِ لحاظ ہوگا۔ پلوں کے انجینیروں نے اکثر بیان کیا ہے کہ پلوں کا انصراف محسوبہ انصراف سے زیادہ ہوتا ہے۔ اس کی وجہ کسی حد تک ریوٹ دار جوڑوں کا ڈھیلا پڑجانا ہے لیکن اگر محسوبہ انصراف میں جز کا انصراف شامل رکھا جائے تو حقیقی انصراف محسوبہ انصراف سے اتنا مختلف نہیں ہوگا جتنا کہ ہوتا ہے۔ بعض لوگوں کا خیال ہے کہ اگر انصراف کے معمولی ضابطے میں ے کی قیمت ۱۲۵۰۰ کی بجائے ۱۰۰۰۰ ٹن فی مربع انچ لی جائے تو جز کی رعایت ہوجائیگی۔

اس کا بھی خیال رہے کہ ہم نے اعظم جزی زور کے فساد پر غور کیا ہے حالانکہ جز متغیر ہوتا ہے۔ اس طرح نتیجہ حقیقی سے کسی قدر زیادہ حاصل ہوتا ہے لیکن اوسط جزی زور لینے سے ہی بہتر ہے۔

جز وغیرہ کی وجہ سے شہتیر کی تراش میں مروڑ

خماؤ کے معیار اور شہتیر کے زوروں کے درمیان ربط معلوم کرتے وقت برنولی کے مفروضہ کا استعمال کیا گیا یعنی کہ تراش خمیدگی کے بعد بھی مستوی رہتی ہے۔

تراش کو مروڑ دینے والے دو اسباب ہیں: (۱) جزی زور (۲) ریشوں کے بڑھنے کی وجہ سے جانبی فشار پیدا ہوتے ہیں اُن کا غیر یکساں ہونا۔

ایک شہتیر کی دو تراشوں پر غور کرو جو باہم فاصلہ لا پر ہوں (شکل ۱۲۱) اور فرض کرو کہ ان پر خماؤ کے معیار م اور م۱ ہیں۔ مرکزی خط سے فاصلہ ما پر دو نقطوں ط اور ط۱ پر غور کرو۔ دونوں پر تراش ایک ہی ہے۔

$$\text{تب ط پر زور} = \frac{\text{م ما}}{\text{آ}}$$

$$\text{اور ط}_1 \text{ '' } = \frac{\text{م}_1 \text{ ما}}{\text{آ}}$$

$$\therefore \text{ط}_1 \text{ پر جانبی فشاری فساد} = \text{عا} \times \frac{\text{م ما}}{\text{آ ے}}$$

$$ط_ا = عا \times \frac{م_ا}{آ\ ے}$$

کیونکہ طولی فساد = $\frac{زور}{ے}$ اور جانبی یا عرضی[۵] فساد = عا × طولی فساد

∴ جانبی فشاری فساد کا فرق = $\frac{عا}{آ\ ے}$ $(م_ا - م)$ ما

∴ تراش کے ایک چھوٹے طول فرما پر جانبی فشار کا فرق

$$= ط ط_ا = \frac{عا}{آ\ ے} (م_ا - م) \text{ ما فرما}$$

$$∴ \quad عہ = ط ط_ا \text{ کا ڈھال} = \frac{ط ط_ا}{لا} = \frac{عا}{آ\ ے} \times \frac{م_ا - م}{لا} \times \text{ما فرما}$$

لیکن لا بہت چھوٹا ہو تو $\frac{م_ا - م}{لا}$ = جزی قوت ق

$$∴ \quad عہ = \frac{عا}{آ\ ے} \times ق \times \text{ما فرما}$$

کسی تراش کے اور ایسے خط کے درمیان جو ابتداءً میں مرکزی خط کے متوازی تھا زاویہ کی تبدیلی معلوم کرنے کے لیے زاویہ کی ان چھوٹی چھوٹی تبدیلیوں کو جمع کرنا ہوگا۔

$$∴ \quad \text{مجموعی تبدیلی} = ط = \frac{ق \times عا}{آ\ ے} \int \text{ما فرما}$$

$$= \frac{ق\ عا\ ما^2}{۲\ آ\ ے} = \frac{س\ عا\ ما^2}{۲\ ے\ گ^2}$$

$$\text{کیونکہ} \quad س = \frac{ق}{ب}$$

یہ ہم پہلے دکھا چکے ہیں کہ جزر کی وجہ سے زاویہ کی تبدیلی $\frac{س \cdot ب \cdot ما}{۲\ م \cdot ض\ گ^2}$ ہوتی ہے۔

[۵] lateral or transverse

∴ دونوں اسباب کی وجہ سے مجموعی تبدیلی

$$= \frac{\text{س}}{\text{ع گ}^{2}} \left(\frac{\text{ب ما}}{\text{ض م}} + \frac{\text{عا ما}^{2}}{2\ \text{ے}} \right)$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{م گ}^{2}} \left(\frac{\text{ب ما}}{\text{ض}} + \frac{\text{عا ما}^{2}\ \text{م}}{2\ \text{ے}} \right)$$

ے $= \frac{5}{2}$ م اور عا $= \frac{1}{4}$ رکھنے سے یہ تبدیلی

$$= \frac{\text{س}}{\text{م گ}^{2}} \left(\frac{\text{ب ما}}{\text{ض}} + \frac{\text{ما}^{2}}{20} \right)$$

اس ربط سے تراش کے کسی حصے پر ڈھال معلوم کیا جا سکتا ہے اور تراش کی بگڑی ہوئی شکل حاصل ہو سکتی ہے۔ اس دلچسپ مسئلے کی مزید بحث ہماری کتاب کی وسعت سے باہر ہے لیکن یہاں جو کچھ بتایا گیا ہے وہ یہ واضح کرنے کے لیے کافی ہے کہ اس سے بحث کس طرح کی جائیگی۔

شہتیروں کے جز، خماؤ، اور انصراف کا خلاصہ
(فصل ل)

شہتیر کی قسم	بوجھ	اعظم جز = ن ل ن	اعظم خماؤ کا معیار = م × و ل م	اعظم انصراف = ر × و ل^۳ / آ ے ر
آزادانہ سہارا ہوا	یکساں	۱/۲	۱/۸	۵/۳۸۴
"	مرکزی	۱/۲	۱/۴	۱/۴۸
ثابت	یکساں	۱/۲	۱/۱۲	۱/۳۸۴
"	مرکزی	۱/۲	۱/۸	۱/۱۹۲
برآمدہ بیرم	یکساں	۱	۱/۲	۱/۸
"	سرے پر	۱	۱	۱/۳

حصہ اول تمام شد

فہرست اصطلاحات

تعمیروں کا نظریہ اور تجویز

حصہ اول

انگریزی	اُردو
A	
Anemometer	بادپیما
Asymmetrical section	غیر متشاکل تراش
B	
Beam	شہتیر
Bearing	مسند
Bending	خماؤ
Breaking stress	شکستی زور
Buckling	خمیدگی
Built-in	دربستہ
Built-up	ساختہ
Butt joint	الصاقی جوڑ
C	
Cantilever	برآمدہ بیرم

انگریزی	اُردو
Centre-punch	مرکز سنبہ
Centroid	مرکز ہندسی
Cleat connections	کلیٹی رابطے
Conjugate diameter	مزدوج قطر
Contraflexure	انعطاف۔ تعاکس خمیدگی
Countersunk head	آنکھ تراش سر
Cover plate	ڈھکن تختی۔ ڈھانک تختی
Crane	حمالہ
D	
Dead load	مردہ بوجھ
Deflection	انصراف
Distribution	تقسیم
Double shear	دوہرا جز
Ductility	تمدد

اُردو	انگریزی
حرکیاتی ضابطہ	Dynamic formula
	E
لچک	Elasticity
رُوکار	Elevation
ناقص	Ellipse
امتدادپیما - تمددپیما	Extensometer
	F
قدرِ سلامتی	Factor of safety
ناکارگی	Failure
کور	Flange
خماؤ کی استواری	Flexural rigidity
مرکب شہتیر	Flitched beam
شکستگی	Fracture
ریسمانی کثیرالاضلاع	Funicular polygon
	G
کلی تختی	Gusset plate
	H
غیر متجانس	Heterogeneous
بیش کاربن فولاد	High-carbon steel
حُدبی فساد	Hogging strain
رفعی کل	Hoisting mechanism
متجانس	Homogeneous
ماسکونیات	Hydrostatics

اُردو	انگریزی
	I
ضرب۔ صدمہ۔ تصادم	Impact
تکملی منحنی	Integral curve
زور کی حدّت	Intensity of stress
منفرد بوجھ	Isolated load
	J
بازو	Jib
چُولدار۔ دندانہ دار	Joggled
	L
آغوش جوڑ	Lap joint
جانبی	Lateral
بادپشت جانب	Leeward side
چُونا گچ	Lime mortar
انتہائی زور	Limiting stress
ریسمانی کثیرالاضلاع	Link polygon
لداؤ	Loading
طریق	Locus
کم کاربن فولاد	Low-carbon steel
	M
مقیاس	Modulus
معیارِ جمود	Moment of inertia
	N
تعدیلی محور	Neutral axis
عمادی	Normal

انگریزی	اُردو
O	
Ordinate	معین
Overhanging ends	برآویختہ سرے
P	
Pan head	کڑاہی سر
Parabola	مکافی
Permanent set	مستقل فساد
Pitch	گھائی
Pivot	چُول
Planimeter	سطح پیما
Plastic body	پیکر پذیر جسم
Points of contraflexure	نقاطِ انعطاف
Polygon	کثیر الاضلاع
Principal	صدر کڑی
Pull	کھینچ
Punching machine	ٹُھپی مشین
R	
Radius of gyration	گردشی نصف قطر
Range	وسعت
Reamer	روزن کشا
Repetition	تکرار
Resilience	بازگشتگی
Resultant stress	حاصل زور
Rigidity modulus	اُستواری کا مقیاس
Riveting	ریوٹ کاری
Rolled section	بیلی تراش
Roller bearing	پھرکی مسند۔گردونہ مسند
Rolling load	دوریہ بوجھ۔متحرک بوجھ
Rosette	پھول
Rotor	گردشہ
S	
Safe load	بےخطر بوجھ
Sagging strain	قعری فساد
Secondroid	ثانویہ
Settlement	بیٹھاؤ
Shear	جز
Single shear	اکہرا جز
Snap head	گول سر
Span	فصل
Specimen	نمونہ
Stability	قائمیت۔قائم پذیری
Stanchion	کھم
Static stress	سکونی زور
Steelyard	گز۔تک
Strain	فساد
Stress	زور
Strut	داب روک
Suction pressure	چوس دباؤ

اردو	انگریزی
حاصل جمع منحنی	Sum curve
	T
تنشی زور	Tensile stress
تناؤ کور	Tension flange
امتحانی مشین۔ جانچ کل	Testing machine
تہائی خطوط۔ تثلیثی خطوط	Third lines
بندھن سلاخ	Tie bar
چوبینہ	Timber
مروڑ	Torsion
چربہ کاغذ	Tracing paper
عرضی فساد	Transverse strain
منحرف	Trapezium
گھوڑی میز	Trestle table
	U
یکساں بوجھ	Uniform load
	V
سمتی کثیر الاضلاع	Vector polygon
	W
کامی زور	Working stress
	Y
نقطۂ مغلوبیت	Yield point
	Z
کج مج۔ لہریا	Zig-zag

اشاریہ

تعمیروں کا نظریہ اور تجویز

(حصۂ اوّل)

اغلاط نامہ

تعبیروں کا نظریہ اور تجویز

(حصۂ اول)

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۵	۱۰	نقسہ	نقشہ	۴۹	۱۳	ب ے / ب ے	ب ے / ب ے ۱
۷	شکل ۱ بالائی	[illegible]ی	مقامی	۵۱	۱۸	سمینٹی	سیمنٹی
″	″	ج	ج ۱	۵۷	۱۴	مم	وم
″	″ ″ زیریں	ا	ا،	۶۵	۱۴	کرے	کرنے
۹	۴	امتدادبیما	امتدادپیما	۸۴	۴	وسرا	دوسرا
۱۰	شکل ۳	۵	۵۰۰	۱۲۲	۱۹	تختیوں	تختیوں
۱۱	۱۷	کوی	کوئی	۱۲۴	۱۳	ریئوٹوں	ریوٹوں
۱۲	پیشانی	باب ۳	باب ۱	۱۳۵	جدول میں	ـا اور I	ـ اور]
۱۳	۱۱	حامل	مماثل	۱۴۳	شکل ۱ میں	و	ولا
″	۲۰	حائے	جائے	۱۴۴	۱۱	مد	مد
۱۵	۱۱	باب ۲ ر / ۲ ہ	باب ۲ ز / ۲ ہ	۱۴۷	۶	مکانی	مکافی
۳۱	۱	نظراندر	نظرانداز	۱۶۶	۱۳	جاتی	جاتی
۳۸	۱۴	ہونے	ہوئے	۱۶۸ / ۱۶۹	پیشانی	متحقی	منحنی
۴۹	پیشانی	باب ۲	باب ۱	۱۸۲	۱۸	دیا جائیگا	پایا جائیگا

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۸۲	۹	کمانوں	کمانوں
۱۹۵	۶	تراش	تراش
۱۹۸	۲	فشاری	فشاری
۱۹۹	۳	۳۰×-۶۰	۳۰ × ۶۰
۲۳۷	شکل ۸۳ کے نیچے دائیں جانب	ب	ب۱
۲۴۴	۲۱	عمل	محل
۲۴۶	۱۴	$\frac{ا}{ل}$	$\frac{ا}{ل}$
۲۴۹	۱۲	بجویز	تجویز
”	۲۳	زیرِبحث	زیرِ بحث
۲۵۰	شکل ۸۳ کے نیچے دائیں جانب	ف۱	ف۱
۲۸۰	۷	اَب	اب
۲۸۸	شکل کے نیچے	شکل ۱۹۳/۱	شکل ۹۳/۱
۲۹۶	۱۱	$\frac{1}{1200}$	$\frac{1}{1200}$
”	۱۴	اطول	طول
۳۰۴	۱	نہ	یہ

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۳۶	۵	$\frac{م_۲ ل}{۶}$	$\frac{م_۲ ل_۱}{۶}$
۳۴۹	شکل ۱۰۶ الف		$\frac{ل}{۱۲}$
۳۵۸	۵	$\frac{ل_۱ ف_۲}{ل_۲ ف_۲}$	$\frac{ل_۱ ف_۲}{ل_۲ ف_۱}$
۳۶۰	شکل ۱۰۹ دائیں جانب	۱۲	۲۱
۳۶۲	شکل ۱۱۰ بائیں		$\frac{ل}{۴}$ ، $\frac{ب ل^۲}{۸}$ ، $\frac{۵}{۸}$ ب ل
۳۷۰	۱۶	ایک طول	ایک کا طول
۳۷۱	۳	۲م ب	۲م ب
”	۱۰	$(ل_۱^۳ - ل_۲^۳)$	$(ل_۱^۳ + ل_۲^۳)$
”	۱۲	$(ل_۱ - ۲ل_۱ + ۲ل_۱)$	$(۳ل_۱ - ۶ل_۱ + ۲ل_۱)$
۳۸۶	شکل ۱۱۹ (دائیں) اوپر		جا
۳۸۸	۴	کی صورتوں	کی خاص صورتوں